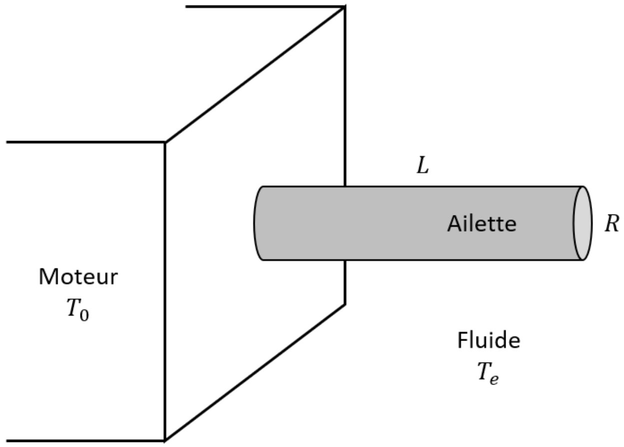
Ailettes de refroidissement

On souhaite refroidir un moteur en fixant sur lui un certain nombre d'ailettes de forme cylindrique (rayon R, longueur L), de conductivité thermique λ. Chaque ailette est au contact d'un fluide à la température $T_e < T_0$, où T_0 est la température du moteur.



Au niveau de la surface de contact avec le fluide, les pertes thermiques par unité de temps et de surface s'écrivent :

$$\delta Q = h\,(T - T_e)\,dSdt$$

avec h constant (relation de Newton).

<u>Données</u> :

- ○ Conductivité thermique $\lambda = 400$ W·m^{-1}·K^{-1}
- ○ Coefficient conducto-convectif $h = 100$ W·m^{-2}·K^{-1}
- ○ Rayon de l'ailette $R = 2,0$ mm
- ○ Longueur de l'ailette $L = 15$ cm
- ○ Température du moteur en régime permanent $T_0 = 82$ °C
- ○ Température du fluide extérieur $T_e = 22$ °C

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée en régime stationnaire par la température $T(M)$ en un point M de l'ailette.

2) En supposant l'ailette « infiniment longue », déterminer le nombre d'ailettes à placer sur le moteur pour évacuer un flux thermique $\phi_m = 40$ W.

3) Que devient ce nombre sans l'hypothèse précédente ? Conclure.

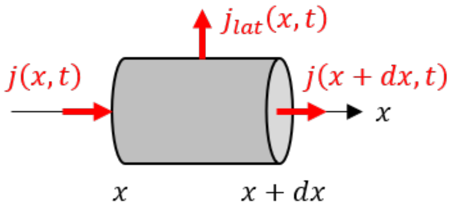
4) Comment améliorer le système ?

Correction

Une question ? Un soucis de QRCode ? nicolasperrissin@gmail.com

Correction

1) Étant donné que $R \ll L$, on peut supposer que la température $T(r,x,t)$ ne dépend pas de la variable r. On est en régime permanent, donc la température ne dépend pas de la variable t. Ainsi, $T(x)$.



On applique le premier principe en régime permanent, sur une tranche de cylindre d'épaisseur dx entre les instants t et $t+dt$.

$$d^2H = 0 = j(x)\,\pi R^2 dt - j(x+dx)\,\pi R^2 dt - h\,(T - T_e)\,2\pi R dx dt$$

Ainsi,

$$0 = -\frac{dT}{dx}\pi R^2 dx dt - h\,(T-T_e)\,2\pi R dx dt$$

Avec la loi de Fourier, il vient :

$$0 = \lambda\frac{d^2T}{dx^2}\pi R^2 dx dt - h\,(T-T_e)\,2\pi R dx dt$$

Après simplification :

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta^2} = -\frac{T_e}{\delta^2} \quad \text{avec :} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}} = 6,3\ \text{cm}}$$

2) La solution générale s'écrit :

$$T(x) = T_e + A\,e^{-x/\delta} + B\,e^{x/\delta}$$

L'ailette étant supposée « infiniment longue », la température ne peut pas diverger en $x = +\infty$, donc $B = 0$. De plus, la continuité de la température en $x = 0$ impose : $T_0 = T_e + A$. On en déduit :

$$\boxed{T(x) = T_e + (T_0 - T_e)\,e^{-x/\delta}}$$

Calculons alors le flux thermique pris au moteur en $x = 0$ par une ailette.

$$\phi_1 = -\lambda\frac{dT}{dx}(x=0)\,\pi R^2 = \frac{\lambda}{\delta}\,(T_0 - T_e)\,\pi R^2 = 4,77\ \text{W}$$

On en déduit le nombre d'ailettes nécessaire :

$$\boxed{N = \frac{\phi_m}{\phi_1} = 8,4 \simeq 9}$$

3) L'ailette n'est pas infini car δ (distance de pénétration thermique) n'est pas négligeable devant L (longueur de l'ailette). La nouvelle condition au limite est le flux thermique en $x = L$ imposé par la loi de Newton.

$$T(x) = T_e + A\,e^{-x/\delta} + B\,e^{x/\delta} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} T(0) = T_0 \\ j(L) = -\lambda\dfrac{dT}{dx}(L) = h\,(T(L) - T_e) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} T_e + A + B = T_0 \\ \dfrac{\lambda}{\delta}\left(A\,e^{-L/\delta} - B\,e^{L/\delta}\right) = h\left(A\,e^{-L/\delta} + B\,e^{L/\delta}\right) \end{cases}$$

On remplace B dans la deuxième expression puis on isole A.

$$\frac{\lambda}{\delta}\left(A\,e^{-L/\delta} - (T_0 - T_e - A)\ e^{L/\delta}\right) = h\left(A\,e^{-L/\delta} + (T_0 - T_e - A)\ e^{L/\delta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2\lambda}{\delta}A\ \text{ch}\left(\frac{L}{\delta}\right) - \frac{\lambda}{\delta}\,(T_0 - T_e)\,e^{L/\delta} = -2hA\ \text{sh}\left(\frac{L}{\delta}\right) + h\,(T_0 - T_e)\,e^{L/\delta}$$

$$\Rightarrow A\left[\frac{2\lambda}{\delta}\ \text{ch}\left(\frac{L}{\delta}\right) + 2h\ \text{sh}\left(\frac{L}{\delta}\right)\right] = \left(\frac{\lambda}{\delta} + h\right)(T_0 - T_e)\,e^{L/\delta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} A = \dfrac{\dfrac{\lambda}{\delta} + h}{\dfrac{2\lambda}{\delta}\ \text{ch}\left(\dfrac{L}{\delta}\right) + 2h\ \text{sh}\left(\dfrac{L}{\delta}\right)}\,(T_0 - T_e)\,e^{L/\delta} = 59,5\ °\text{C} \\ B = T_0 - T_e - A = 0,50\ °\text{C} \end{cases}}$$

Ainsi,

$$\phi_1 = -\lambda\frac{dT}{dx}(x=0)\,\pi R^2 = \frac{\lambda}{\delta}\,(A - B)\,\pi R^2 = 4,70\ \text{W}$$

On en déduit le nombre d'ailettes nécessaire:

$$\boxed{N = \frac{\phi_m}{\phi_1} = 8,5 \simeq 9}$$

On peut bien supposer ailettes infiniment longue, puisque ne calcul exact ne change rien au résultat.

4) Il est possible de changer la forme des ailettes afin de maximiser les échanges thermiques avec le milieu extérieur. Le coefficient δ vaut :

$$\sqrt{\frac{\lambda S}{Ph}}$$

avec S la surface transverse et P le périmètre. Pour maximiser les échanges thermiques avec le milieu extérieur, il faut donc réduire δ, c'est-à-dire maximiser le périmètre pour une surface donnée. Le cercle (cas de l'exercice) étant la forme géométrique qui minimise le périmètre pour une surface donnée, il s'agit en réalité de la pire forme possible. On imagine une surface rectangulaire de même surface et de ratio longueur/largeur $\eta \geq 1$. Alors,

$$Long. = R\sqrt{\eta\pi} \quad \text{et} \quad Larg. = R\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}$$

Ainsi,

$$S = \pi R^2 \quad \text{et} \quad P = R\sqrt{\pi\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)}$$

Le périmètre est maximisé pour $\eta \to \infty$. C'est bien ce que l'on retrouve dans les ailettes de refroidissement des radiateurs ou des moteurs.