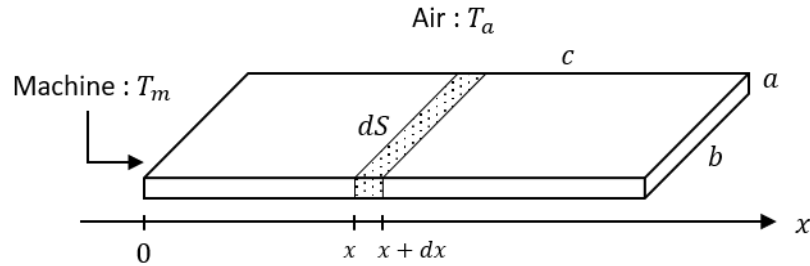


Ailette de refroidissement

Pour éviter un échauffement trop important d'un appareil électrique, on munit l'arrière de son boîtier d'ailettes de refroidissement métalliques. Chaque ailette est parallélépipédique, d'épaisseur $a = 2,0$ mm, de largeur $b = 10$ cm et de longueur $c = 12$ cm. On considérera $a \ll b$ dans les calculs.



En fonctionnement permanent, le boîtier de l'appareil maintient une température $T_m = 60$ °C. L'air extérieur est à la température constante et uniforme $T_a = 20$ °C.

On suppose que la température est uniforme dans les directions y et z , et que le transfert de chaleur se fait par conduction selon l'axe x : $T(x)$ dans l'ailette. La conductivité thermique de l'ailette est $\lambda = 20$ W·m⁻¹·K⁻¹. Il existe un transfert thermique des surfaces latérales vers l'air ambiant, décrit par la loi de Newton :

$$d\phi = h(T(x) - T_a) dS$$

où $h = 180$ W·m⁻²·K⁻¹ est le coefficient de transfert conducto-convectif.

- 1) Établir un bilan d'énergie sur une tranche d'épaisseur dx .
- 2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température en régime permanent. On fera apparaître une longueur caractéristique δ . Comparer δ et c .
- 3) Résoudre cette équation et donner l'expression de $T(x)$ compte tenu de l'inégalité entre δ et c .
- 4) Exprimer la puissance thermique \mathcal{P}_0 transmise par le boîtier de l'appareil à l'ailette en $x = 0$.
- 5) Exprimer la puissance thermique \mathcal{P}_e évacuée par l'ailette. Conclure.
- 6) Combien d'ailettes faut-il fixer sur le boîtier pour évacuer une puissance totale $\mathcal{P}_{tot} = 200$ W ?



Correction

Correction

1) On applique le premier principe version enthalpique (car transformation monobare) sur une tranche dx de l'ailette, entre les instant t et $t + dt$. Il existe en flux thermique par conduction en x , en $x + dx$ et un flux conducto-convectif sur la surface latérale $dS = 2dx(a + b) \simeq 2b dx$.

$$\begin{aligned} d^2H &= \rho ab dx (T(x, t + dt) - T(x, t)) \\ &= ab (j(x, t) - j(x + dx, t)) dt - h (T(x, t) - T_a) 2b dx dt \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\rho ab dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = -ab \frac{\partial j}{\partial x} dx dt - h (T - T_a) 2b dx dt$$

Avec la loi de Fourier et après simplification :

$$\rho a \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2h (T - T_a)$$

2) En régime permanent :

$$\lambda a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2h (T - T_a) = 0$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{T - T_a}{\delta^2} = 0 \quad \text{avec : } \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} = 1 \text{ cm} \ll c$$

3) Solution générale :

$$T(x) = T_a + A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta}$$

Or $\delta \ll c$, donc : $T(x = c) \simeq T(+\infty) = T_a$. On en déduit $B = 0$.

De plus, par continuité de la température en $x = 0$, on en déduit :

$$T(x) = T_a + (T_m - T_a) e^{-x/\delta}$$

4) Calculons le flux thermique en $x = 0$.

$$\mathcal{P}_0 = ab j(x = 0) = -\lambda ab T'(x = 0) = \lambda ab \frac{T_m - T_a}{\delta}$$

4) Calculons le flux thermique transféré à l'air sur toute la surface de l'ailette. Avec nos hypothèses, l'ailette est supposée infinie et la surface vaut

$$\mathcal{P}_e = \int_0^\infty h (T - T_a) 2b dx = 2bh (T_m - T_a) \int_0^\infty e^{-x/\delta} dx = 2bh (T_m - T_a) \delta$$

En régime permanent, on doit avoir $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_e$. En effet :

$$\mathcal{P}_0 = \lambda ab \frac{T_m - T_a}{\delta} = b \sqrt{2h\lambda a} (T_m - T_a) = 2bh (T_m - T_a) \delta = \mathcal{P}_e$$

5) AN : $\mathcal{P}_0 = 15 \text{ W}$. Ainsi :

$$\frac{\mathcal{P}_{tot}}{\mathcal{P}_0} = 13,3$$

Il faut 14 ailettes.