

FAMILLES SOMMABLES

► Familles sommables numériques

1. (a) On a :

$$\sum_{x \in \mathbb{Q}} |x| \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} n = +\infty$$

et donc la famille n'est pas sommable.

(b) — Si $|z| \geq 1$, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z|^n \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} |z|^n = +\infty$$

et donc la famille n'est pas sommable.

— Si $|z| < 1$ on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |z|^n \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} |z|^{-n} = +\infty$$

et donc c'est encore raté !

(c) On a, par théorème de Fubini pour les familles à termes positifs :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \left| \frac{e^{iq\pi/2}}{2^q p!} \right| = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{e^{iq\pi/2}}{2^q p!} \right| \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^q p!} \right) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e}{2^q} = 2e < \infty$$

et donc la famille $\left(\frac{e^{iq\pi/2}}{2^q p!} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est sommable. On peut lui appliquer le théorème de Fubini (version générale cette fois-ci) et obtenir :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{e^{iq\pi/2}}{2^q p!} = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{iq\pi/2}}{2^q p!} \right) = \sum_{q=0}^{\infty} e \left(\frac{i}{2} \right)^q = \frac{2e}{5} (2+i).$$

2. Commençons par remarquer que si on pose $I_p = \{p\} \times \llbracket 1, p \rrbracket$ et $J_q = \llbracket q, \infty \rrbracket \times \{q\}$, pour $p, q \geq 1$, on a :

$$I = \bigsqcup_{p=1}^{\infty} I_p = \bigsqcup_{q=1}^{\infty} J_q$$

et donc par sommation par paquets on a, pour toute famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in I}$ sommable :

$$\sum_{(p,q) \in I} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{(p,q) \in I_p} u_{p,q} \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^p u_{p,q} \right)$$

et

$$\sum_{(p,q) \in I} u_{p,q} = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=q}^{\infty} u_{p,q} \right).$$

(a) La famille est à termes positifs donc pas besoin de prendre de précaution :

$$\sum_{(p,q) \in I} \frac{1}{p!} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^p \frac{1}{p!} \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p-1)!} = e.$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$; alors par sommation par paquets on a :

$$\sum_{(p,q) \in I} \left| \frac{qz^q}{p(p+1)} \right| = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=q}^{\infty} \left| \frac{qz^q}{p(p+1)} \right| \right) = \sum_{q=1}^{\infty} q|z|^q \left(\sum_{p=q}^{\infty} \frac{1}{p(p+1)} \right).$$

Or, par télescopage :

$$\sum_{p=q}^{\infty} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{q}$$

et donc

$$\sum_{(p,q) \in I} \left| \frac{qz^q}{p(p+1)} \right| = \sum_{q=1}^{\infty} |z|^q = \frac{1}{1-|z|} < \infty.$$

Notre famille étant sommable, on peut la sommer par paquet sans module, pour...refaire le même calcul sans module! On obtient :

$$\sum_{(p,q) \in I} \frac{qz^q}{p(p+1)} = \sum_{q=1}^{\infty} qz^q \left(\sum_{p=q}^{\infty} \frac{1}{p(p+1)} \right) = \sum_{q=1}^{\infty} z^q = \frac{1}{1-z}.$$

3. (a) En développant $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, on obtient $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Pour la seconde inégalité, étudier la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha - (1+x^\alpha)$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

— Cas $0 < \alpha \leq 1$. Par théorème de Fubini :

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} \right).$$

Or, par comparaison à une série de Riemann on a :

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} = +\infty$$

et donc la famille étudiée n'est pas sommable.

— Cas $1 < \alpha \leq 2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p + q = n\}$ de sorte à avoir la partition :

$$(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

et donc, par sommation par paquets de famille positive :

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} \right).$$

De plus, d'après la question précédente, on a pour tous $p, q \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{p}{q}\right)^\alpha \geq 1 + \frac{p^\alpha}{q^\alpha}$$

et donc

$$\frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} \geq \frac{1}{(p+q)^\alpha}$$

ce qui entraîne

$$\sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} \geq \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{\text{Card}(I_n)}{n^\alpha}.$$

Remarquons ensuite que :

$$I_n = \{(k, n-k) \mid k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}$$

et donc $\text{Card}(I_n) = n-1$. On en déduit que :

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^\alpha} = +\infty$$

car $\frac{n-1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$, qui est le terme général d'une STP divergente car $\alpha - 1 \leq 1$. La famille étudiée n'est donc pas sommable.

— Cas $\alpha > 2$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall p, q \geq 1, \quad \frac{1}{p^\alpha + q^\alpha} \leq \frac{1}{2\sqrt{p^\alpha q^\alpha}} = \frac{1}{2(pq)^{\alpha/2}}.$$

Or, les familles $\left(\frac{1}{2(pq)^{\alpha/2}}\right)_p$ et $\left(\frac{1}{2(pq)^{\alpha/2}}\right)_q$ sont sommables par comparaison à une série de Riemann convergente, la famille $\left(\frac{1}{2(pq)^{\alpha/2}}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable par théorème de Fubini. On en déduit que la famille $\left(\frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable par majoration de familles positives.

4. Par théorème de Fubini pour les familles positives :

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2} = \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \right)^2 < \infty.$$

5. Soit $x \in [0, e^{-1}[$; on applique le théorème de Fubini pour les familles positives :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{x^q q^p}{p!} = \sum_{q=1}^{\infty} x^q \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{q^p}{p!} \right) = \sum_{q=1}^{\infty} (xe)^q = \frac{1}{1 - xe}.$$

6. On a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n < \infty$$

donc la famille $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable. Posons ensuite $A = \mathbb{N}$ et $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}$; on a alors $\mathbb{Z} = A \sqcup B$. Alors, par sommation par paquets on a l'existence des sommes *infra* et l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n &= \sum_{n \in A} a_n + \sum_{n \in B} a_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta} \\ &= \frac{1}{1 - re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1 - re^{-i\theta}} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}. \end{aligned}$$

7. (a) D'après le théorème de Fubini "positif", on a :

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}^*} |x^{mn}| = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (|x|^m)^n = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{|x|^m}{1 - |x|^m}$$

Or, on a l'équivalent $\frac{|x|^m}{1 - |x|^m} \sim |x|^m$ et donc, par théorème sur les séries à termes positifs, comme la série $\sum_{(n \geq 1)} |x|^m$ converge, on a la convergence de la série $\sum_{(n \geq 1)} \frac{|x|^m}{1 - |x|^m}$ et donc la sommabilité de la famille $(x^{mn})_{m,n \in \mathbb{N}^*}$.

(b) Comme la famille $(x^{mn})_{m,n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, on a, d'après le théorème de Fubini :

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}^*} x^{mn} = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (x^m)^n = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{x^m}{1 - x^m},$$

qui est bien la somme d'une série numérique, dont la convergence absolue découle du théorème précité.

8. Pour $i, j \in \mathbb{N}$ on pose $a_{i,j} = \frac{i+j}{2^{i+j}}$.

(a) Remarquons que $\text{Card}(I_n) = n+1$; on a donc :

$$\sum_{(i,j) \in I_n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I_n} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \text{Card}(I_n) \frac{n}{2^n} = \frac{n(n+1)}{2^n}.$$

(b) On vérifie (par exemple par critère de d'Alembert) que la série $\sum \frac{n(n+1)}{2^n}$ est convergente. De plus, la famille $(I_n)_n$ partitionne \mathbb{N} ergo, par sommation par paquets "positive" :

$$\sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} a_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{(i,j) \in I_n} \frac{i+j}{2^{i+j}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} < \infty$$

et donc la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

► Applications aux séries numériques

9. (a) Notons que par permutation des termes d'une série absolument convergente, la série $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge. Puisque

$$0 \leq \frac{1}{n\sigma(n)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sigma(n)^2} \right)$$

on peut affirmer, par comparaison de séries à termes positifs, que la série étudiée converge.

(b) Posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2}$ pour $n \geq 1$. On a :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{8n} \rightarrow \frac{1}{8}.$$

et donc la série étudiée diverge (car si elle convergeait, on aurait $S_{2n} - S_n \rightarrow 0$).

(c) Pour n assez grand, $n^2 \geq n \ln n$ donc

$$\frac{\sigma(n)}{n^2} \leq \frac{\sigma(n)}{n \ln n}$$

et donc la série étudiée diverge.

10. Commençons par remarquer que l'égalité

$$\mathbb{N}^* = \bigsqcup_{p=0}^{\infty} \{(2q+1)2^p \mid q \in \mathbb{N}\}$$

décrit une partition de \mathbb{N}^* (penser à la valuation 2-adique). De fait :

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} x^{(2q+1)2^p} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} x^{2^p} \left(\sum_{q=0}^{\infty} x^{2^p 2q} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} x^{2^p} \left(\sum_{q=0}^{\infty} (x^{2^{p+1}})^q \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}}. \end{aligned}$$

11. (a) Soit $n \geq 1$; puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue décroissante, on a par comparaison série-intégrale :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

donc, par encadrement :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

- (b) D'après ce qui précède et le critère de Riemann, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a un sens si et seulement si $\alpha > 2$.
- (c) Pour $n, k \geq 0$, on pose $u_{k,n} = \frac{1}{k^\alpha}$ si $k > n$ et $u_{k,n} = 0$ sinon. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}| < \infty$$

donc par Fubini :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n}$$

avec convergence des séries sous-jacentes. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

12. Remarquons que si $a \in]0, 1[$ et $b \in \mathbb{R}$ on a, par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes :

$$\frac{e^b}{1-a} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b^k}{k!} a^{n-k} \right).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{b^k}{k!} a^{n-k} = a^n \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^k}{k!}$$

et donc, en posant $a = \frac{1}{2}$ et $b = 2$, on reconnaît le terme générale de la suite $(u_n)_n$. *In fine*, on a donc convergence de $\sum u_n$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 2e^2.$$

► Approfondissements

13. (a) Les I_n sont clairement deux à deux distincts. De plus, tout couple (p, q) d'entiers appartient à l'ensemble I_{pq} , d'où le résultat.
- (b) Pour $x \in]-1, 1[$, on peut écrire

$$\frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} x^{k\ell}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{x^k}{1-x^k} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\ell=1}^{+\infty} |x|^{k\ell} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{1-|x|^k},$$

cette dernière somme étant finie car $\frac{|x|^k}{1-|x|^k} \sim |x|^k$. La famille $\left(\frac{x^k}{1-x^k}\right)_k$ est donc sommable et, par sommation par paquets :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,\ell) \in I_n} x^{k\ell} = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Card}(I_n) x^n.$$

Il suffit pour conclure de remarquer que :

$$\forall n \geq 1, \quad I_n = \left\{ \left(k, \frac{n}{k}\right) \mid k|n \right\}$$

et donc que $\text{Card}(I_n) = \delta_n$.

14. (a) Puisque $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0$ et donc $(v_n)_n$ est bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|u_k v_{n-k}| \leq M |u_k|$ donc la famille $(u_k v_{n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable par majoration.
- (b) Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable avec

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|$$

et la famille $(|u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|)_{k \in \mathbb{Z}}$ est aussi sommable donc, par sommation par paquets :

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} |u_k v_{n-k}| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| |v_{n-k}| < +\infty.$$

Puisque

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| |v_{n-k}|$$

on a $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. De plus, par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} u_k v_{n-k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

ce qui donne

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} v_\ell.$$

- (c) On a, pour $u, v, w \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$(u \star v)_n = \sum_{k+\ell=n} u_k v_\ell = (v \star u)_n$$

et

$$((u \star v) \star w)_n = \sum_{k+\ell+m=n} u_k v_\ell w_m = (u \star (v \star w))_n.$$

La loi \star est donc commutative. associative.

Pour $\varepsilon \in \ell^1(\mathbb{Z})$ définie par $\varepsilon_n = \delta_{n,0}$, $u \star \varepsilon = u$ donc ε est un élément neutre pour \star .

Considérons ensuite la famille u définie par $u_n = \delta_{0,n} - \delta_{1,n}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Si on suppose u inversible et que l'on note v son inverse, la relation $u \star v = \varepsilon$ donne $v_n - v_{n-1} = \varepsilon_n = \delta_{0,n}$ pour tout entier n . Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0$ et puisque $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$. De même pour tout $n < 0$, $v_n = 0$. Mais alors, pour $n = 0$, $v_n - v_{n-1} = \delta_{0,n}$ donne $0 = 1$. L'élément u n'est pas inversible et donc $(\ell^1(\mathbb{Z}), \star)$ n'est pas un groupe.

15. (a) La convergence découle directement du CSSA, et la divergence de $\sum |u_n|$ du critère de Riemann. Ainsi, la famille n'est pas sommable.

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme général de la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ par elle-même vérifie

$$v_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$

Une brève étude de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(n+1-x)}$ nous permet ensuite d'établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \geq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(n+1-\frac{n}{2}\right)}} = \frac{2}{n+2}$$

et donc

$$|v_n| \geq \frac{2n}{n+2}$$

et donc la série $\sum v_n$ diverge grossièrement.

- (c) La bijection σ est bien définie sur une partition de \mathbb{N} , et son image décrit une autre partition de \mathbb{N} de façon injective : on a bien défini une bijection. Posons ensuite, pour $n \geq 0$:

$$w_n = u_{\sigma(3n)} + u_{\sigma(3n+1)} + u_{\sigma(3n+2)}$$

de sorte que, par calcul direct, il existe une constante $C < 0$ telle que :

$$w_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$$

et donc $\sum w_n$ est divergente. Or, on a pour tout $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{3N} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^N w_n \rightarrow -\infty$$

et donc $(u_{\sigma(n)})_n$ n'est pas sommable.