FAMILLES SOMMABLES

▶ Familles sommables numériques

1. Les familles suivantes sont elles sommables ? Si oui, calculer leur somme.

   (a) $(x)_{x\in\mathbb{Q}}$; (b) $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $z \in \mathbb{C}^*$; (c) $\left(\dfrac{e^{iq\pi/2}}{2^q p!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

2. On pose $I = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid q \leq p\}$. Démontrer que les familles $(u_{p,q})_{(p,q)\in I}$ suivantes sont sommables et déterminer leurs sommes :

   (a) $u_{p,q} = \dfrac{1}{p!}$; (b) $u_{p,q} = \dfrac{qz^q}{p(p+1)}$ avec $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

3. (a) Pour $a, b \geq 0$ et $\alpha > 1$, vérifier que $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ et $(1+b)^\alpha \geq 1 + b^\alpha$.

   (b) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ la famille $\left(\dfrac{1}{p^\alpha + q^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est–elle sommable ?

4. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

5. Soit $x \in [0, e^{-1}[$; démontrer que :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{x^q q^p}{p!} = \frac{1}{1 - xe}\,.$$

6. Soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{Z}$, $a_n = r^{|n|}e^{in\theta}$. Étudier la sommabilité et, le cas échéant, calculer la somme de la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

7. On fixe $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$.

   (a) Démontrer que la famille $(x^{mn})_{m,n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

   (b) Exprimer la somme de cette famille comme somme d'une série numérique.

8. Pour $i, j \in \mathbb{N}$ on pose $a_{i,j} = \dfrac{i+j}{2^{i+j}}$.

   (a) Démontrer que, pour tout $n \geq 0$ on a :

$$\sum_{(i,j)\in I_n} a_{i,j} = \frac{n(n+1)}{2^n}\,,$$

   où $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = n\}$.

   (b) Que peut–on en déduire quant à la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$?

▶ Applications aux séries numériques

9. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}^*)$. Étudier la nature des séries de termes généraux suivants (pour $n \geq 1$) :

   (a) $\dfrac{1}{n\sigma(n)}$; (b) $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$; (c) $\dfrac{\sigma(n)}{n\ln n}$.

10. Soit $x \in [0,1[$; démontrer que :

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2^p}}{1 - x^{2^{p+1}}}\,.$$

11. (a) Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent à

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

   (b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?

(c) Montrer qu'alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^{\alpha-1}}\,.$$

12. Pour $n \geq 0$, on pose :
$$u_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}\,.$$
Démontrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme. ***Indication :*** *on pourra s'aider en calculant le produit de Cauchy d'une série exponentielle par une série géométrique.*

► Approfondissements

13. (a) Démontrer que les ensembles $I_n=\{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2\,|\,pq=n\}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ partitionnent $(\mathbb{N}^*)^2$.
    (b) En déduire que pour tout $x\in]-1,1[$, on a :
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n x^n\ ,$$
    où $\delta_n=\mathrm{Card}\{d\in\mathbb{N}^*\mid d|n\}$.
14. On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ sommables, *i.e* telles que :
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|u_n|<+\infty\,.$$
    (a) Pour $u,v\in\ell^1(\mathbb{Z})$ et soit $n\in\mathbb{Z}$ **fixé**, montrer que la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
    (b) Soient $u,v\in\ell^1(\mathbb{Z})$; on pose $u\star v=(w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, où :
$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad w_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k v_{n-k}\,.$$
    Démontrer que $u\star v\in\ell^1(\mathbb{Z})$ et que l'on a :
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}w_n=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}v_n\right)\,.$$
    (c) Vérifier que la loi $\star$ définie à la question précédente est commutative, associative et possède un élément neutre (que l'on précisera). L'ensemble $(\ell^1(\mathbb{Z}),\star)$ est–il un groupe ?
15. On pose pour $n\geq 0$, $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
    (a) Vérifier que $\sum u_n$ converge. La famille $(u_n)_n$ est–elle sommable ?
    (b) Démontrer que le produit de Cauchy de $\sum u_n$ par elle–même n'est pas sommable.
    (c) Montrer qu'il existe une unique bijection $\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ telle que pour tout $p\in\mathbb{N}$ on ait $\sigma(3p)=2p$, $\sigma(3p+1)=4p+1$ et $\sigma(3p+2)=4p+3$. Que dire de la sommabilité de la famille $(u_{\sigma(n)})_n$?