Fonctions de deux variables

▶ Topologie de $\mathbb{R}^2$

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on pose $A = f^{-1}(I)$.
   — Si I est ouvert : on se donne $x \in A$; alors $f(x) \in I$ et par caractère ouvert il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subset I$.
   Par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^2$ on ait :
   $$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   et donc $f(y) \in I$ si $y \in \overline{D}(x, \delta)$. De fait, on a $D(x, \delta) \subset A$, ce qui entraîne que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   — Si I est fermé, alors $X = \mathbb{R} \setminus I$ est ouvert et égal à la réunion de deux intervalles ouverts I_1 et I_2. De fait :
   $$\mathbb{R}^2 \setminus A = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid f(u) \notin I\} = f^{-1}(X) = f^{-1}(I_1) \cup f^{-1}(I_2)\,,$$
   la dernière égalité se vérifiant rapidement en revenant à la définition d'image réciproque. Le complémentaire de A étant un ouvert par réunion finie d'ouverts (cas précédent), A est fermé.
2. On va utiliser l'exercice précédent.
   (a) A est l'image réciproque de l'intervalle $]1, 3[$ par la fonction polynomiale (donc continue) $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$: c'est un ouvert.
   (b) B est l'image réciproque de l'intervalle $[0, 1]$ par la fonction polynomiale (donc continue) $(x, y) \mapsto x$: c'est un fermé.
   (c) C est l'image réciproque de l'intervalle $]1, \infty[$ par la fonction continue $(x, y) \mapsto |x^3 - 4\sin(y)|$: c'est un ouvert ;
   (d) D n'est ni ouvert ni fermé car il ne contient aucune boule centrée en $(1, 0)$ et que son complémentaire ne contient aucune boule centrée en $(3, 0)$.
3. Soit F un s–e.v de $\mathbb{R}^2$. Si $F = \{0\}$ ou $\mathbb{R}^2$, il est trivialement fermé. Sinon, il existe un vecteur $u \neq 0$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $F = \mathrm{Vect}(u)$ (les seuls s–e.v non triviaux de $\mathbb{R}^2$ sont les droites).
   Posons $X = \mathbb{R}^2 \setminus F$ et fixons $x \in X$. On sait que la distance $d(x, F)$ est atteinte en le point y projeté orthogonal de x sur F ; posons donc
   $$d = d(x, F) = \|x - y\|$$
   de sorte que
   $$\forall z \in F, \quad \|x - y\| > \|x - z\|\,.$$
   On a donc $D\left(x, \frac{d}{2}\right) \subset X$, donc X est ouvert. *In fine*, F est fermé.
4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Alors, si l'on pose $r = \|(x, y)\|$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. On a ensuite :
   $$f(x, y) = \frac{r^2 \cos(\theta)\sin(\theta)}{r^2} = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$
   ce qui entraîne que :
   $$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{1}{2}|\sin(2\theta)|\,.$$
   Fixons $\alpha > 0$; si l'on choisit $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ et $r \leq \alpha$, on a :
   $$\|(x, y) - (0, 0)\| = r \leq \alpha$$
   et pourtant
   $$|f(x, y) - f(0, 0)| = \frac{1}{2}|\sin(2\theta)|$$
   ce qui contredit la définition de limite avec tout $\varepsilon < \dfrac{1}{2}|\sin(2\theta)|$.

5. (a) Il s'agit d'un produit de composées de fonctions usuelles.
   (b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors, si l'on pose $r = \|(x,y)\|$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. De fait :

$$|f(x,y)| \leq |x+y^2| \leq r + r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

   et donc on peut bien poser $f(0,0) = 0$ pour prolonger f par continuité en l'origine.

▶ Calcul différentiel

6. (a) Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on a existence des dérivées partielles par usualité et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

   Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $(\mathbb{R}^*)^2$ par continuité de ses dérivées partielles. Elle n'admet pas de dérivée partielle en $(0,0)$ (les taux d'accroissements divergent).
   (b) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a existence des dérivées partielles par usualitude et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xy^2e^{x^2y} + \sin(y^3) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = y(x^2y+2)e^{x^2y} + 3xy^2\cos(y^3)\,.$$

   Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par continuité de ses dérivées partielles.
   (c) Par usualisation, les dérivées partielles de h existent en tout point de son ensemble de définition, à savoir de l'ouvert :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq y^2\}$$

   et pour tout $(x,y) \in \Omega$ on a :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{(x+y^2)^2}\exp\left(\frac{1}{x+y^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}\exp\left(\frac{1}{x+y^2}\right)\,.$$

   Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par continuité de ses dérivées partielles.

7. (a) On procède par analyse–synthèse.
   — *Analyse.* Soit f une fonction solution des équations définie sur $\mathbb{R}^2$. Alors en intégrant à $y \in \mathbb{R}$ fixé la première équation, on a l'existence d'une "constante" (à y fixé) $C(y)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + C(y)\,.$$

   Similairement, à $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a l'existence d'une "constante" $D(x)$ telle que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + D(x)\,.$$

   On a donc par soustraction :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad D(x) = C(y)$$

   et donc nos "constantes" sont donc bien constantes, et égales. *In fine*, il existe une constante (sans guillemets) $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + C\,.$$

   — *Synthèse.* Il est immédiat que la fonction définie *supra* est bien solution des équations de l'énoncé.
   (b) De la même façon, on trouve que f est définie sur $(\mathbb{R}^*)^2$ et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C\,.$$

(c) Supposons trouvée f solution de l'équation sur un ouvert Ω. En fixant $y \in \mathbb{R}$ et en intégrant la première équation, on obtient l'existence d'une "constante" $C(y)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) \in \Omega$ on a :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C(y)\,.$$

Mais alors, pour tout $(x, y) \in \Omega$ on a que C doit être dérivable en y et que :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C'(y)$$

et donc par soustraction par la seconde équation de l'énoncé :

$$C'(y) = \frac{-2y}{y^2+x^2}$$

ce qui est incompatible avec le fait que C ne dépend pas de x. Les équations proposées n'ont donc pas de solution.

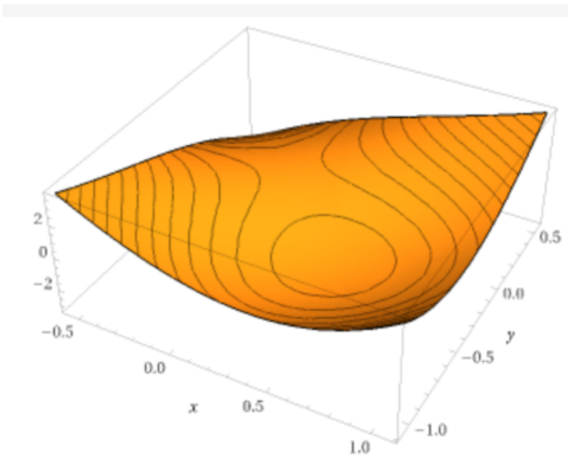
8. (a) Par calcul direct, la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3(x-y)^2 + 6x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3(x-y)^2 + 6y\,.$$

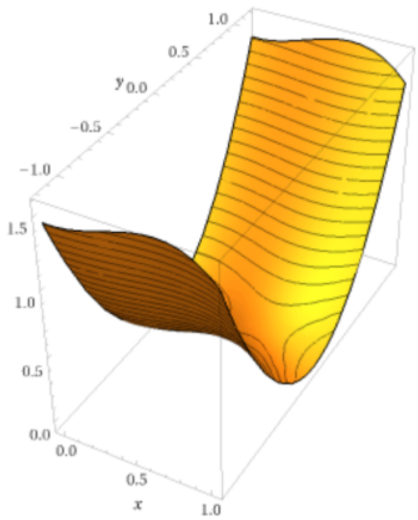
Ainsi, les points critiques de f sont $(0, 0)$ et $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t, t^2) = 6t^3$, qui est du signe de t. On n'a donc pas un extremum local en $(0, 0)$.
Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}+h, -\frac{1}{2}+k\right) - f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= (1+(h-k))^3 + 6\left(\frac{1}{2}+h\right)\left(k-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= (1+(h-k))^3 + 6\left(\frac{1}{2}+h\right)\left(k-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= 3(h-k)^2 + 6hk + (h-k)^3 \\ &= 3(h^2+k^2) + (h-k)^3\,. \end{aligned}$$

Cette expression est positive pour h, k proches de 0 donc le point $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ est un minimum local pour la fonction f.



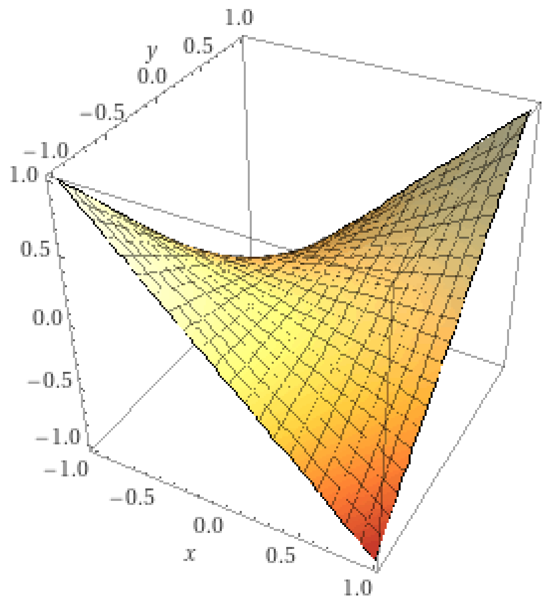
(b) Similairement, on trouve deux points critiques : $(0, 0)$, qui est un minimum local car $f(x, y) \geq 0$ est positive au voisinage de $(0, 0)$, et $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ qui est un point selle car l'expression $f\left(\frac{2}{3}+t, t\right) - f\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ change de signe avec $t \in \mathbb{R}$.



(c) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y) = (y^3, 3xy^2)$$

et donc les seuls points critiques de f sont les $(t, 0)$, pour $t \in \mathbb{R}$, et $f(t{\cdot}0) = 0$. Si x et y sont de même signe, on a $f(x, y) > 0$; à l'inverse, si ils sont de signes opposés, on a $f(x,y) < 0$. De fait, f n'admet aucun extremum local.



9. Les lignes de niveaux de f sont soit vides soient les cercles de $\mathbb{R}^2$ centrés en 0. Pour la fonction g, fixons $a \in \mathbb{R}$; alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$g(x, y) = a \iff y = x^2 - a$$

et donc les lignes de niveau de g sont les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2 - a$ pour $a \in \mathbb{R}$.

10. — *Méthode 1 :* pour tout $t \in \mathbb{R}$ on $F(t) = t^6 + t^3 e^{-2t} + \exp(t^3 - e^{-t})$ et donc, en dérivant comme un animal :

$$F'(t) = 6t^5 + t^2(3 - 2t)e^{-2t} + (3t^2 + e^{-t})\exp(t^3 - e^{-t})\,.$$

— *Méthode 2 :* on applique la règle de la chaîne à $F = f \circ \varphi$ avec $\varphi : t \mapsto (t^3, e^{-t})$, ce qui donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F'(t) = 3t^2 \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) - e^{-t}\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))$$

et, comme pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2 + e^{x-y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy - e^{x-y}$$

on trouve le même résultat !

11. Vous le devinez, il va falloir enchaîner (ah ah) les dérivations de composées. On en parle de cet anglicisme[1] horrible ? Pour gagner du temps, fixons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (a) C'est parti !

    $$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y)\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) + \frac{\partial}{\partial x}(x)\frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

    et

    $$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y)\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) + \frac{\partial}{\partial y}(x)\frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)\,.$$

    (b) Ici, c'est plus simple, il n'y a qu'une variable.

    $$g_2'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\,.$$

    (c) Qu'est–ce qu'on s'amuse.

    $$\frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y)\frac{\partial f}{\partial x}(y,f(x,x)) + \frac{\partial}{\partial x}(f(x,x))\frac{\partial f}{\partial y}(y,f(x,x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(y,f(x,x))$$

    et

    $$\frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y)\frac{\partial f}{\partial x}(y,f(x,x)) + \frac{\partial}{\partial y}(f(x,x))\frac{\partial f}{\partial y}(y,f(x,x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,f(x,x))\,.$$

    (d) À ce stade on a compris l'idée, je ne détaille pas. On trouve :

    $$g_4'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,f(x,x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x,f(x,x))$$

    et c'est super.

12. On considère dans cet exercice une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

    (a) Si on pose

    $$u : (x,y) \mapsto x+y \quad \text{et} \quad v : (x,y) \mapsto x-y$$

    on a :

    $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = F(u(x,y), v(x,y))$$

    et donc c'est parti pour une règle de la chaîne ! On trouve, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

    $$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial F}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\frac{\partial F}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial u}(u(x,y),v(x,y) + \frac{\partial F}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\end{aligned}$$

    et, similairement :

    $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial u}(u(x,y),v(x,y) - \frac{\partial F}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\,.$$

    (b) On raisonne par analyse–synthèse.

1. L'expression "règle de la chaîne" provient du vocabulaire anglais pour la dérivée de composée, en l'occurrence *chain rule*.

— *Analyse.* Supposons trouvée une solution f de notre EDP et posons $F :\mapsto f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$.
Alors, d'après le calcul précédent, on a pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 2uv$$

et donc il existe une "constante" $A(v)$, nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$ car F l'est, telle que :

$$F(u, v) = u^2 v + A(v) .$$

En reformulant, on obtient que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + y)^2 (x - y) + A(x - y) .$$

— *Synthèse.* On vérifie que toute fonction de la forme *supra* est bien solution de l'EDP étudiée.

▶ Approfondissements

13. L'application $\varphi : (u, v) \mapsto (u + v, uv)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de U vers $\mathbb{R}^2$. Soit $(s, p) \in \mathbb{R}^2$ Si $(s, p) = \varphi(u, v)$ alors u et v sont les deux racines de $x^2 - sx + p = 0$ et donc $\Delta = s^2 - 4p > 0$. Les valeurs prises par φ appartiennent à

$$V = \left\{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\right\}$$

De plus, pour $(s, p) \in V$, il existe un unique couple (u, v) tel que $u < v$ et $\varphi(u, v) = (s, p)$, c'est le couple formé des deux racines de l'équation $x^2 - sx + p = 0$

$$u = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \text{ et } v = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

Ainsi φ réalise une bijection de U sur V. On vérifie aisément que U et V sont des ouverts (par image réciproque d'ouverts par des applications continues *ad–hoc*) et que φ ainsi que φ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^1$.

14. (a) Soient $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ appartenant à $f(C)$. On peut supposer $y_1 \leq y_2$ et soit y dans l'intervalle $[y_1, y_2]$. On considère la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f((1 - t)x_1 + tx_2)$. g est bien définie car C est convexe, g est continue, $g(0) = f(x_1) = y_1, g(1) = f(x_2) = y_2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction d'une variable réelle g, il existe $t \in [0, 1]$ avec $g(t) = y$. Posons $x = (1 - t)x_1 + tx_2 \in C$. Alors $f(x) = y$. Ceci prouve bien que $f(C)$ est un intervalle.

    (b) Posons $C = \{(x, y) \in I \mid x > y\}$ et $g : (x, y) \mapsto f(x) - f(y)$ définie sur C. Alors C est convexe (la vérification est triviale) et donc $g(C)$ est un intervalle d'après la question précédente, et cet intervalle ne peut pas contenir 0 puisque f est injective. Ainsi, on a ou bien $g > 0$ ou bien $g < 0$. Le premier cas dit que, si $x > y$, alors $f(x) > f(y)$ et donc que f est strictement croissante. Le second cas dit que f est strictement décroissante.