

## FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

► Topologie de  $\mathbb{R}^2$ 

1. Démontrer que l'image réciproque d'un intervalle ouvert (resp. fermé) par une fonction continue de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  est un ouvert (resp. fermé).

2. Les ensembles suivants sont-ils ouverts dans  $\mathbb{R}^2$ ? Fermés?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |1 < x^2 + y^2 < 3\}; \\ \text{(b)} & B = \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\}; \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(c)} & C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x^3 - 4 \sin(y)| > 1\}; \\ \text{(d)} & D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |1 \leq x^2 + y^2 < 3\}. \end{array}$$

3. Montrer que tout s.e.v de  $\mathbb{R}^2$  est fermé.

4. Démontrer que l'application définie par  $f((0, 0)) = 0$  et  $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

5. On considère la fonction  $f$  définie sur  $(\mathbb{R}^*)^2$  par :

$$f : (x, y) \mapsto (x + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

(a) Vérifier que  $f$  est continue.

(b) Peut-on prolonger  $f$  par continuité en  $(0, 0)$ ?

## ► Calcul différentiel

6. Déterminer les dérivées partielles et le gradient des fonctions suivantes en tout point où elles existent. Ces fonctions sont-elles de classe  $\mathcal{C}^1$ ?

$$\text{(a)} \quad f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \text{(b)} \quad g : (x, y) \mapsto y^2 e^{x^2 y} + x \sin(y^3); \quad \text{(c)} \quad h : (x, y) \mapsto \exp\left(\frac{1}{x + y^2}\right).$$

7. Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert maximal solutions des équations suivantes :

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 y \end{cases}; \quad \text{(b)} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}; \quad \text{(c)} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

8. Déterminer les extrema des fonctions suivantes, définies sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & f : (x, y) \mapsto (x - y)^3 + 6xy; \\ \text{(b)} & g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3; \end{array} \quad \text{(c)} \quad h : (x, y) \mapsto xy^3.$$

9. Déterminer les lignes de niveau des fonction  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  et  $g : (x, y) \mapsto x^2 - y$ .

10. Soit  $f : (x, y) \mapsto x^3 + xy^2 + e^{x-y}$ ; on pose pour  $t \in \mathbb{R}$   $F(t) = f(t^3, e^{-t})$ . Déterminer  $F'$  de deux façons différentes.

11. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Déterminer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & g_1 : (x, y) \mapsto f(y, x); \\ \text{(b)} & g_2 : x \mapsto f(x, x); \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(c)} & g_3 : (x, y) \mapsto f(y, f(x, x)); \\ \text{(d)} & g_4 : x \mapsto f(x, f(x, x)). \end{array}$$

12. On considère dans cet exercice une fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

$$\text{(a)} \quad \text{Exprimer } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ à l'aide des dérivées partielles de la fonction } F : (u, v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

(b) Résoudre à l'aide d'un changement de variables l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 2y^2.$$

## ► Approfondissements

13. Montrer que  $(u, v) \mapsto (u + v, uv)$  définit une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < v\}$$

vers un ouvert  $V$  que l'on précisera. Vérifier que  $\varphi^{-1}$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$  (on dit que  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme).

14. Fonctions continues et injectives sur un intervalle.

(a) Soit  $C \subset \mathbb{R}^2$  vérifiant la propriété suivante (on parle alors de *partie convexe* de  $\mathbb{R}^2$ ) :

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in C.$$

Démontrer que si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue alors  $f(C)$  est un intervalle.

(b) Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et injective. Démontrer que  $f$  est strictement monotone. *Indication : on pourra considérer l'application  $g : (x, y) \mapsto f(x) - f(y)$ .*

## ► Exercices CCINP

**33** On pose :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $f(0, 0) = 0$ .

1. Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Démontrer que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .
3.  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.

**52** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prouver que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .
2. (a) Justifier que le domaine de définition de  $f$  est bien  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Dans cette question, on suppose que  $\alpha = 0$ .  
(a) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et les calculer.  
(b) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  et donner leur valeur.  
(c)  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ ?

**57** 1. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

(a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ .

2. On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .