

ESPÉRANCE, VARIANCE

► **Espérance**

1. Un joueur lance trois dés discernables à 6 faces ; on note X la variable aléatoire associant à chaque issue la somme des chiffres obtenus.

(a) On associe à cette expérience $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^3$ et on a $X(\Omega) = \llbracket 3, 18 \rrbracket$.

(b) On a

$$\mathbb{P}(7.12 \leq X \leq 9.7) = \mathbb{P}(X = 8) + \mathbb{P}(X = 9) = \frac{21}{216} + \frac{25}{216} = \frac{46}{216}.$$

(c) Si on note X_1, X_2 et X_3 les v.a correspondant au résultat de chaque dé, on a par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 10.5$$

car les X_i sont de loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.

2. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire renvoyant 0 si il n'y a pas rencontre au tirage i et 1 sinon. On immédiatelement $X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc le nombre moyen de rencontres est :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

3. Par lemme de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{X^2 + X}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{X(X+1)}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \mathbb{P}(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

4. D'après le lemme de transfert et l'indépendance de X et Y on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{X+Y+1}\right) &= \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} \frac{1}{k+\ell+1} \mathbb{P}(X = k, Y = \ell) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{k+\ell+1} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = \ell) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{k+\ell+1} \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} p^{k+\ell} (1-p)^{2n-k-\ell} \end{aligned}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons :

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{k+\ell+1} \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} p^{k+\ell} (1-p)^{2n-k-\ell} t^{k+\ell+1}.$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} p^{k+\ell} (1-p)^{2n-k-\ell} t^{k+\ell} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k \right)^2 = (pt+1-p)^{2n}.$$

Comme $f(0) = 0$, on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \int_0^t f'(u) du = \frac{1}{(2n+1)p} ((pt+1-p)^{2n+1} - (1-p)^{2n+1})$$

et donc :

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{X+Y+1} \right) = f(1) = \frac{1}{(2n+1)p} (1 - (1-p)^{2n+1}) .$$

5. (a) On a X_1, \dots, X_n mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ donc $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.
 (b) Par calcul direct :

$$\mathbb{E} \left(\frac{S_n}{n} \right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(S_n) = p \quad \text{et} \quad V \left(\frac{S_n}{n} \right) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{p(1-p)}{n} .$$

- (c) Soit $\varepsilon > 0$, alors par inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} .$$

Une étude de fonction aussi triviale que classique démontre ensuite que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et donc on a bien :

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} .$$

- (d) D'après la question précédente, on a pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| < 0.05 \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq 0.05 \right) \geq 1 - \frac{1}{4n(0.05)^2} = 1 - \frac{100}{n}$$

et donc cette quantité sera supérieure à 0.95 si $n \geq 2000$.

6. On commence par remarquer que :

$$\mathbb{E}(e^{tY_n}) = \mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^n e^{tX_k/n} \right) .$$

Or, par lemme des coalitions, les variables $e^{tX_1/n}, \dots, e^{tX_n/n}$ sont mutuellement indépendantes, ergo :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tY_n}) &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left(e^{tX_k/n} \right) \\ &= \left(1 + p \left(e^{t/n} - 1 \right) \right)^n \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue par lemme de transfert.

7. Les v.a $f(X_1, X_2)$ et $f(X_2, X_1)$ sont toutes deux à valeurs dans F . Pour $y \in F$ on a ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f(X_1, X_2) = y) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{f(X_1, X_2)=y}) \\ &= \sum_{(x_1, x_2) \in E^2} \delta_{y, f(x_1, x_2)} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= \sum_{(x_1, x_2) \in E^2} \delta_{y, f(x_1, x_2)} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x_2) \\ &= \sum_{(x_1, x_2) \in E^2} \delta_{y, f(x_2, x_1)} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x_2) \\ &= \sum_{(x_2, x_1) \in E^2} \delta_{y, f(x_1, x_2)} \mathbb{P}(X_1 = x_2) \mathbb{P}(X_2 = x_1) \\ &= \sum_{(x_2, x_1) \in E^2} \delta_{y, f(x_1, x_2)} \mathbb{P}(X_2 = x_1, X_1 = x_2) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{f(X_2, X_1)=y}) \\ &= \mathbb{P}(f(X_2, X_1) = y) \end{aligned}$$

et donc $f(X_1, X_2)$ et $f(X_2, X_1)$ ont même loi.

► Variance, covariance

8. (a) Comme $1 = \mathbb{P}_X(\llbracket 1, n \rrbracket) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k)$, on trouve facilement $\lambda = \frac{2}{n(n+1)}$.

(b) Le calcul est direct :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \lambda k^2 = \frac{(2n+1)}{3}$$

et

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=1}^n \lambda k^3 - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{(2n+1)}{3}\right)^2.$$

9. Remarquons que pour $m \in \mathbb{R}$ on a :

$$\phi(m) = \mathbb{E}((X - m)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2m\mathbb{E}(X) + m^2 = V(X) + (\mathbb{E}(X) - m)^2$$

et donc le minimum de ϕ est $V(X)$, atteint en $m = \mathbb{E}(X)$.

10. Si ça ressemble à Cauchy–Schwarz, on doit pouvoir le démontrer pareil. Essayons, en partant du principe que Y n'est pas nulle p.s (sinon c'est trivial). Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leq \text{Cov}(X + \lambda Y, X + \lambda Y) = V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + \lambda^2 V(Y).$$

Nous avons donc la un trinôme du second degré en λ de signe constant (positif) : son discriminant est donc négatif ou nul, *i.e*

$$4\text{Cov}(X, Y)^2 - 4V(X)V(Y) \leq 0$$

ce qui nous livre l'inégalité désirée !

11. Notons F la variable aléatoire qui désigne le nombre de "face" obtenus avec n lancers. Alors $F \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Posons ensuite $X = \frac{F}{n}$; alors on a :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\frac{F}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}(F)}{n} = \frac{1}{2}$$

et

$$V(X) = V\left(\frac{F}{n}\right) = \frac{V(F)}{n^2} = \frac{1}{4n}.$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X - 0.5| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

et donc

$$\mathbb{P}(|X - 0.5| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = 0.05$, on a donc

$$\mathbb{P}(0.45 < X < 0.55) \geq 1 - \frac{100}{n}$$

En prenant $n = 1000$, on a alors

$$P(0.45 < X < 0.55) \geq 0.9,$$

ce qui répond à la question posée.

12. L'idée est de choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$(X_n \leq k) \subset (|X_n - np| \geq \varepsilon).$$

La valeur $\varepsilon = np - k$ convient et est strictement positive pour n assez grand. On a alors, par Bienaymé–Tchebychev :

$$\mathbb{P}(X_n \leq k) \leq \frac{np(1-p)}{(np-k)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

13. (a) La relation est évidente si $a = b$. Supposons maintenant que $a + 1 \leq b$; alors :

$$\sum_{k=1}^b \binom{k}{a} = 1 + \sum_{k=a+1}^n \binom{k}{a} = 1 + \sum_{k=a+1}^b \binom{k+1}{a+1} - \binom{k}{a+1} = 1 + \binom{b+1}{a+1} - \binom{a+1}{a+1} = \binom{b+1}{a+1}$$

- (b) Si on note Ω l'univers de l'expérience aléatoire, alors $\text{Card}(\Omega) = \binom{N}{n}$. X est à valeurs dans $\llbracket n, N \rrbracket$. Soit donc $k \in \llbracket n, N \rrbracket$. Choisir n boules dont le plus grand numéro est k revient à choisir $n - 1$ boules parmi celles numérotées de 1 à $k - 1$. Ainsi $\text{Card}(X = k) = \binom{k-1}{n-1}$ puis $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$. Y est à valeurs dans $\llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket$. Soit donc $k \in \llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket$. Choisir n boules dont le plus petit numéro est k revient à choisir $n - 1$ boules parmi celles numérotées de $k + 1$ à N . Ainsi $\text{card}(Y = k) = \binom{N-k}{n-1}$ puis $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}$. (X, Y) est à valeurs dans $\{(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, i - j \geq n - 1\}$. Soit donc (i, j) dans cet ensemble. Choisir n boules dont le plus grand numéro est i et le plus petit j revient à choisir $n - 2$ boules parmi celles numérotées de $j + 1$ à $i - 1$. Ainsi $\text{card}([X = i] \cap [Y = j]) = \binom{i-j-1}{n-2}$ puis $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\binom{i-j-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}$. Remarquons que $X - Y$ est à valeurs dans $\llbracket n - 1, N - 1 \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket n - 1, N - 1 \rrbracket$. Alors

$$\mathbb{P}(X - Y = k) = \sum_{j=1}^{N-k} \mathbb{P}(X - Y = k, Y = j) = \sum_{j=1}^{N-k} \mathbb{P}(X = j + k, Y = j) = \frac{(N - k) \binom{k-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}.$$

- (c) On a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=n}^N k \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N k \binom{k-1}{n-1} = \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \frac{n \binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n(N+1)}{n+1}$$

Pour le calcul de l'espérance de Y , on peut remarquer que $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = N + 1 - k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{N-n+1} k \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N-n+1} k \mathbb{P}(X = N + 1 - k) \\ &= \sum_{k=n}^N (N + 1 - k) \mathbb{P}(X = k) \\ &= (N + 1) \sum_{k=n}^N \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{E}(X) \\ &= N + 1 - \frac{n(N + 1)}{n + 1} = \frac{N + 1}{n + 1} \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=n}^N k^2 \mathbb{P}(X = k) \\
 &= \sum_{k=n}^N [k(k+1) - k] \mathbb{P}(X = k) \\
 &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N k(k+1) \binom{k-1}{n-1} - \mathbb{E}(X) \\
 &= \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \binom{k+1}{n+1} - \frac{n(N+1)}{n+1} \\
 &= \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n+1}^{N+1} \binom{k}{n+1} - \frac{n(N+1)}{n+1} \\
 &= \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \binom{N+2}{n+2} - \frac{n(N+1)}{n+1} \\
 &= \frac{n(N+1)(N+2)}{n+2} - \frac{n(N+1)}{n+1} \\
 &= \frac{(Nn + n + N)(N+1)n}{(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$

Enfin

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(Nn + n + N)(N+1)n}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n(N+1)}{n+1}\right)^2 = \frac{n(N+1)(N-n)}{(n+2)(n+1)^2}$$

En remarquant que $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = N + 1 - k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, N - n + 1 \rrbracket$ et que $\mathbb{E}(Y) = N + 1 - \mathbb{E}(X)$

$$\begin{aligned}
 V(Y) &= \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y))^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{N-n+1} (k - \mathbb{E}(Y))^2 \mathbb{P}(Y = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{N-n+1} (k - (N+1) + \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = N+1-k) \\
 &= \sum_{k=n}^N (\mathbb{E}(X) - k)^2 \mathbb{P}(X = k) \\
 &= V(X) = \frac{(Nn + n + N)(N+1)n}{(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$

(d) Tout d'abord

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}((X - Y)^2) &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k^2 \mathbb{P}(X - Y = k) \\
 &= \sum_{k=n-1}^{N-1} \frac{k^2 (N-k) \binom{k-1}{n-2}}{\binom{N}{n}} \\
 &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \left(N \sum_{k=n-1}^{N-1} k^2 \binom{k-1}{n-2} - \sum_{k=n-1}^{N-1} k^3 \binom{k-1}{n-2} \right)
 \end{aligned}$$

Posons $S_m = \sum_{k=n-1}^{N-1} k^m \binom{k-1}{n-2}$. On trouve successivement

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k \binom{k-1}{n-2} \\ &= (n-1) \sum_{k=n-1}^{N-1} \binom{k}{n-1} \\ &= (n-1) \binom{N}{n} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k^2 \binom{k-1}{n-2} \\ &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k(k+1) \binom{k-1}{n-2} - \sum_{k=n-1}^{N-1} k \binom{k-1}{n-2} \\ &= (n-1)n \sum_{k=n-1}^{N-1} \binom{k+1}{n} - S_1 \\ &= (n-1)n \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} - (n-1) \binom{N}{n} \\ &= (n-1)n \binom{N+1}{n+1} - (n-1) \binom{N}{n} \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k^3 \binom{k-1}{n-2} \\ &= \sum_{k=n-1}^{N-1} k(k+1)(k+2) \binom{k-1}{n-2} - 3S_2 - 2S_1 \\ &= (n-1)n(n+1) \sum_{k=n-1}^{N-1} \binom{k+2}{n+1} - 3 \left((n-1)n \binom{N+1}{n+1} - (n-1) \binom{N}{n} \right) - 2(n-1) \binom{N}{n} \\ &= (n-1)n(n+1) \sum_{k=n+1}^{N+1} \binom{k}{n+1} - 3(n-1)n \binom{N+1}{n+1} + (n-1) \binom{N}{n} \\ &= (n-1)n(n+1) \binom{N+2}{n+2} - 3(n-1)n \binom{N+1}{n+1} + (n-1) \binom{N}{n} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X-Y)^2) &= \frac{1}{\binom{N}{n}} (NS_2 - S_3) \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \left(N(n-1)n \binom{N+1}{n+1} - N(n-1) \binom{N}{n} - (n-1)n(n+1) \binom{N+2}{n+2} + 3(n-1)n \binom{N+1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \left((n-1)n(N+3) \binom{N+1}{n+1} - (n-1)(N+1) \binom{N}{n} - (n-1)n(n+1) \binom{N+2}{n+2} \right) \\ &= \frac{(n-1)n(N+3)(N+1)}{n+1} - (n-1)(N+1) - \frac{(n-1)n(N+2)(N+1)}{n+2} \\ &= \frac{(n-1)(N+1)(nN+n-2)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 V(X - Y) &= \mathbb{E}((X - Y)^2) - \mathbb{E}(X - Y)^2 \\
 &= \frac{(n-1)(N+1)(nN+n-2)}{(n+1)(n+2)} - (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y))^2 \\
 &= \frac{(n-1)(N+1)(nN+n-2)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n(N+1)}{n+1} - \frac{N+1}{n+1}\right)^2 \\
 &= \frac{2(n-1)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)}
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{2}(V(X) + V(Y) - V(X - Y)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2(Nn+n+N)(N+1)n}{(n+1)(n+2)} - \frac{2(n-1)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)} \right) \\
 &= \frac{n(n+1)(N+1)(Nn+n+N) - (n-1)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)} \\
 &= \frac{(N+1)(2n^2N + n^3N + 2n^2 + n^3 + N - n)}{(n+1)^2(n+2)}
 \end{aligned}$$

► Approfondissements

14. Nous avons démontré dans un TD précédent que si on note d_k le nombre de permutations ayant exactement k points **non** fixes, il existe exactement $\binom{n}{k}d_{n-k}$ permutations ayant exactement k points fixes et que l'on a :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$$

et donc pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\mathbb{P}(X = \ell) = \frac{\binom{n}{\ell} d_{n-\ell}}{n!}.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{k \binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} \\
 &= \frac{n}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} d_{(n-1)-(k-1)} \\
 &= \frac{n(n-1)!}{n!} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Pour calculer la variance, on procède *via* le lemme de transfert :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1) \binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} \\
 &= \frac{n(n-1)}{n!} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} d_{(n-2)-(k-2)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

et donc

$$V(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) - (\mathbb{E}(X))^2 + \mathbb{E}(X) = 1.$$

15. (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$; considérons la variable aléatoire $Y = X - \mathbb{E}(X) + t$. On a

$$X - \mathbb{E}(X) \geq a \iff X - \mathbb{E}(X) + t \geq a + t$$

et ceci entraîne, puisque $a + t \geq 0$,

$$(X - \mathbb{E}(X) + t)^2 \geq (a + t)^2$$

L'événement $(X - \mathbb{E}(X) \geq a)$ est donc inclus dans l'événement $((X - \mathbb{E}(X) + t)^2 \geq (a + t)^2)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) &\leq \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X) + t)^2 \geq (a + t)^2) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X) + t)^2)}{(a + t)^2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Markov. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X) + t)^2) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) + 2t\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) + t^2 \\ &= V(X) + 0 + t^2 \\ &= V(X) + t^2 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

- (b) Posons, pour $t \geq 0$, $f(t) = \frac{t^2 + V(X)}{(a + t)^2}$. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2t(a + t)^2 - 2(a + t)(t^2 + V(X))}{(a + t)^4} \\ &= \frac{2(at - V(X))}{(a + t)^3}. \end{aligned}$$

La fonction f atteint donc son minimum en $t = \frac{V(X)}{a}$, et

$$f\left(\frac{V(X)}{a}\right) = \frac{\frac{V(X)^2}{a^2} + V(X)}{\left(\frac{V(X)}{a} + a\right)^2} = \frac{\frac{V(X)}{a} \left(\frac{V(X)}{a} + a\right)}{\left(\frac{V(X)}{a} + a\right)^2} = \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

De fait, on a :

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

Si on applique cette inégalité à la v.a $Y = -X$, qui a la même variance que X , alors on obtient

$$\mathbb{P}(-(X - \mathbb{E}(X)) \geq a) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

Comme

$$|X - \mathbb{E}(X)| \geq a = ((X - \mathbb{E}(X)) \geq a) \cup (-(X - \mathbb{E}(X)) \geq a)$$

on a bien

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{2V(X)}{V(X) + a^2}.$$

16. (a) Soit $u \in \mathbb{R}$ et X une v.a à valeurs dans \mathbb{Z} ; alors si on pose $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ on a par lemme de transfert :

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=1}^n e^{iux_k} \mathbb{P}(X = x_k).$$

La fonction φ_X est alors combinaison linéaire de fonctions 2π -périodiques (car $x_k \in \mathbb{Z}$) et de classe \mathcal{C}^∞ . De plus,

$$\varphi_X(0) = \mathbb{E}(1) = 1, \quad \varphi_X'(0) = \sum_{k=1}^n ix_k \mathbb{P}(X = x_k) = i\mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \varphi_X''(0) = -\mathbb{E}(X^2).$$

(b) Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , on a

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(u) = (1-p) + pe^{iu}.$$

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors pour tout réel u :

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{iku} = (1-p + pe^{iu})^n.$$

(c) Avec les notations qui précèdent, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(u) e^{-iu x_0} du = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = x_k) \int_0^{2\pi} e^{iu(x_k - x_0)} du.$$

Puisque les $x_k - x_0$ sont entiers, on a :

$$\int_0^{2\pi} e^{iu(x_k - x_0)} du = \begin{cases} 0 & \text{si } x_k \neq x_0 \\ 2\pi & \text{si } x_k = x_0 \end{cases}$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(u) e^{-iu x_0} du = 2\pi \mathbb{P}(X = x_0)$$

De fait, si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors

$$\forall x_0 \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X = x_0) = \mathbb{P}(Y = x_0)$$

et donc $X = Y$.

(d) Notons que $X + Y$ prend ses valeurs dans \mathbb{Z} comme X et Y . Pour tout réel u on a :

$$\varphi_{X+Y}(u) = \mathbb{E}(e^{iu(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{iuX} e^{iuY}) = \mathbb{E}(e^{iuX}) \mathbb{E}(e^{iuY}) = \varphi_X(u) \varphi_Y(u)$$

car les variables X et Y sont supposées indépendantes. Une loi binomiale de paramètres n et p pouvant se comprendre comme la somme de n loi de Bernoulli indépendantes de paramètre p , on retrouve par récurrence le résultat demandé.