

## ESPÉRANCE, VARIANCE

► **Espérance**

- Un joueur lance trois dés discernables à 6 faces ; on note  $X$  la variable aléatoire associant à chaque issue la somme des chiffres obtenus.
  - Quel univers  $\Omega$  associer à cette expérience ? Que vaut  $X(\Omega)$  ?
  - Déterminer  $\mathbb{P}(7.12 \leq X \leq 9.7)$ .
  - Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .
- Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On les extrait successivement avec remise, et on dit qu'il y a rencontre si au  $i$ -ième tirage on tire la boule numéro  $i$ . Quel est le nombre moyen de rencontres ?
- Soit  $X$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ; calculer  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X^2 + X}\right)$ .
- Soient  $X, Y \sim \mathcal{B}(n, p)$  deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X + Y + 1}\right)$ .
- Au sein d'une population donnée, une proportion inconnue  $p \in ]0, 1[$  rêve secrètement de porter des tongs avec des chaussettes. On choisit parmi cette population un échantillon de  $n \in \mathbb{N}^*$  personnes et on pose, pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $X_i = 1$  si la  $i$ -ième personne est prête à porter des tongs avec des chaussettes et  $X_i = 0$  sinon. Pour simplifier les choses, on partira du principe que les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes.
  - Donner la loi des  $X_i$  et celle de  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .
  - Déterminer l'espérance et la variance de  $\frac{S_n}{n}$ .
  - Pour  $\varepsilon > 0$ , démontrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

- Quelle valeur de  $n$  faut-il choisir pour avoir au moins 95% de chances que  $\frac{S_n}{n} \approx p$  à 0.05 près ?
- Soient  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$  mutuellement indépendantes, avec  $p \in [0, 1]$ . On pose :

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

Déterminer, pour  $t \in \mathbb{R}$ , la quantité  $\mathbb{E}(e^{tY_n})$ .

- Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes et de même loi sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$  et soit  $F$  un ensemble. On note  $E = X_1(\Omega) = X_2(\Omega)$  et on se donne une application  $f : E^2 \rightarrow F$  telle que  $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$  pour tout  $(x_1, x_2) \in E^2$ . Montrer que  $f(X_1, X_2)$  et  $f(X_2, X_1)$  ont même loi.

► **Variance, covariance**

- Soient  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $X$  une v.a à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \lambda k.$$

- Déterminer  $\lambda$ .
  - Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $V(X)$ .
- Soit  $X$  une v.a.r. Déterminer le minimum de la fonction

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ m &\mapsto \mathbb{E}((X - m)^2) \end{aligned}.$$

10. Soient  $X, Y$  deux v.a.r ; démontrer que :

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{V(X)V(Y)}.$$

11. On lance  $n$  fois une pièce de monnaie ; déterminer un entier  $n$  tel que la fréquence d'apparition de "face" soit comprise entre 0.45 et 0.55 avec une probabilité au moins égale à 0.9.

12. Pour  $n \geq 1$  on se donne une variable aléatoire  $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , établir que

$$P(X_n \leq k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

13. Soient  $n$  et  $N$  des entiers naturels tels que  $2 \leq n \leq N$ . On effectue un tirage simultané de  $n$  boules dans une urne contenant  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ . On note  $X$  et  $Y$  respectivement le plus grand et le plus petit numéro obtenu.

(a) Soient  $a, b \in \mathbb{N}$  tels que  $a \leq b$ . Montrer que :

$$\sum_{k=a}^b \binom{k}{a} = \binom{b+1}{a+1}.$$

(b) Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$  ainsi que la loi du couple  $(X, Y)$ . En déduire la loi de  $X - Y$ .

(c) Déterminer les espérances et variances de  $X$  et  $Y$ .

(d) Déterminer la variance de  $X - Y$ . En déduire la covariance du couple  $(X, Y)$ .

## ► Approfondissements

14. On munit l'ensemble  $\mathfrak{S}_n$  de sa probabilité uniforme. Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on note  $X(\sigma)$  le nombre de points fixes de  $\sigma$  ; déterminer l'espérance et la variance de  $X$ .

15. *Inégalité de Cantelli*. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et  $a > 0$ .

(a) Démontrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{t^2 + V(X)}{(a+t)^2}$ .

(b) En déduire que

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{2V(X)}{V(X) + a^2}.$$

16. Dans cet exercice, les variables aléatoires sont toutes supposées à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . On appelle *fonction caractéristique* d'une variable aléatoire  $X$  l'application  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\varphi_X : u \mapsto \mathbb{E}(e^{iuX}).$$

(a) Vérifier que  $\varphi_X$  est  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et calculer  $\varphi_X(0)$ . Comment interpréter  $\varphi_X'(0)$  et  $\varphi_X''(0)$  ?

(b) Calculer la fonction caractéristique d'une variable  $X$  suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Même question avec une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

(c) Soient  $X$  une variable aléatoire réelle et  $x_0$  un entier. Vérifier que

$$\mathbb{P}(X = x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(u) e^{-iux_0} du.$$

En déduire que

$$(\varphi_X = \varphi_Y) \implies (X = Y).$$

(d) Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. Vérifier que

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y.$$

Exploiter ce résultat pour retrouver la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

## ► Exercices CCINP

- 95] Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
- Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note  $Y$  le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
    - Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
    - Déterminer la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.
  - Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
    - Déterminer la loi de  $X$ .
    - Déterminer la loi de  $Y$ .
- 98] Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers  $n$  correspondants distincts. On admet que les  $n$  appels constituent  $n$  expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ). Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.
- Donner la loi de  $X$ . Justifier.
  - La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des  $n - X$  correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
    - Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Déterminer, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(Y = k \mid X = i)$ .
    - Prouver que  $Z = X + Y$  suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre. *Indication* : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :  $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$ .
    - Déterminer l'espérance et la variance de  $Z$ .
- 99] 1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit  $(Y_n)_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi sur un univers fini. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ . Prouver que :  $\forall a \in ]0, +\infty[ , P(|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)| \geq a) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$ .
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ? *Indication* : considérer la suite  $(Y_i)_i$  de variables aléatoires de Bernoulli où  $Y_i$  mesure l'issue du  $i^{\text{ème}}$  tirage.
- 104] Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les  $n$  boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les  $n$  boules. On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.
- Préciser les valeurs prises par  $X$ .
  - Déterminer la probabilité  $P(X = 2)$ .
    - Finir de déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - Calculer  $E(X)$ .
    - Déterminer  $\lim E(X)$ . Interpréter ce résultat.