Espaces préhilbertiens réels

▶ Produits scalaires

1. La bilinéarité et la symétrie sont immédiates. Si on fixe $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$S(u, u) = x^2 + 2xy + 3y^2 = (x + y)^2 + 2y^2\,.$$
Cette quantité est positive et nulle si et seulement si $x = -y$ et $y = 0$, *i.e* si et seulement si $u = 0$ donc S est bien un produit scalaire.
2. On note $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $(u_n)_n$ de nombres réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.
   (a) Pour $n \geq 0$, on a :
   $$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$$
   et donc par comparaison de STP $\sum u_n v_n$ converge absolument donc converge.
   (b) On sait que $\ell^2(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(0)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$. De plus, si $u, v \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :
   $$\forall n \geq 0, (u_n + \lambda v_n)^2 = u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + \lambda^2 v_n^2$$
   et donc la série $\sum (u_n + \lambda v_n)^2$ converge par combinaison linéaire de séries convergentes ($\sum u_n v_n$ converge par la question (a)). En conclusion, $\ell^2(\mathbb{N})$ est un s–e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   De plus, si $u, v \in \ell^2(\mathbb{N})$ on a, pour tout $n \geq 0$, comme $u_n \to 0$ par condition nécessaire de convergence on a :
   $$\exists\, N\ \forall n \geq N, \quad u_n \leq 1$$
   et donc $(u_n v_n)^2 \leq v_n^2$ pour n assez grand et donc $\sum (u_n v_n)^2$ converge par comparaison de STP.
   (c) L'application définie (notons la φ) est immédiatement bilinéaire et symétrique par propriétés de la somme d'une série. De plus, si $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ on a :
   $$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \geq 0$$
   donc φ est positive. De plus, si $\varphi(u) = 0$ alors la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n^2$ est une suite croissante de réels positifs convergeant vers 0 : elle est donc nulle, ce qui entraîne que $u = 0$ (les termes de la suite s'obtenant par différence de sommes partielles).
3. Il s'agit d'une application directe de la formule de Cauchy–Schwarz aux vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(1, \ldots, 1)$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
4. (a) Le caractère bilinéaire symétrique est trivial. Soit $f \in \mathrm{E}$; par positivité de l'intégrale, on a
   $$(f \mid f) = f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 0\,.$$
   La forme bilinéaire $\langle | \rangle$ est donc positive. Puisque qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, si $\langle f \mid f\rangle = 0$ alors on a :
   $$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
   La fonction f'^2 étant continue et positive, la deuxième condition est équivalente à $f' = 0$, la fonction f est donc constante et nulle puisque $f(1) = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est donc bien un produit scalaire
   (b) Remarquons que
   $$\langle f \mid \mathrm{id}_{[0,1]}\rangle = f(1) + \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$$
   et
   $$\|f\|^2 = f^2(1) + \int_0^1 f^2(t)dt$$
   donc en appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz aux fonctions f et $\mathrm{id}_{[0,1]}$ on obtient :
   $$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leq 2\left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t)dt\right)\,.$$

▶ Orthogonalité

5. (a) L'application Φ est bilinéaire symétrique. Si $f \in E$, on vérifie que $\Phi(f,f) \geq 0$ par positivité de l'intégrale et comme f^2 est continue et positive, la nullité de $\Phi(f,f)$ entraîne que f^2 est nulle sur $[0, 2\pi]$. La fonction f étant périodique et nulle sur une période, elle est donc nulle.

   (b) Il s'agit "simplement" de calculer quelques intégrales...

$$\begin{aligned}
\Phi(f_0, f_0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2} = 1\\
\Phi(\cos,\cos) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)-1}{2}\,\mathrm{d}t = 1\\
\Phi(\sin,\sin) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (1-\cos(t)^2)\,\mathrm{d}t = 1\\
\Phi(f_0,\cos) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t = 0\\
\Phi(f_0,\sin) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t = 0\\
\Phi(\cos,\sin) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_0^{2\pi}.
\end{aligned}$$

6. (a) La bilinéarité et la symétrie sont triviales. Si $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a de plus :

$$(u|u) = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(y+z)^2}{2} + \frac{(x+z)^2}{2}$$

   et donc il est rapide de vérifier qu'on a bien une forme définie positive.

   (b) Notons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et appliquons lui l'algorithme de Gram–Schmidt. On obtient une famille orthogonale donnée par :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \varepsilon_1 = (1,0,0)\\
u_2 &= \varepsilon_2 - \frac{(\varepsilon_2\,|\,u_1)}{(u_1\,|\,u_1)}u_1\\
&= \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)\\
u_3 &= \varepsilon_3 - \frac{(\varepsilon_3\,|\,u_1)}{(u_1\,|\,u_1)}u_1 - \frac{(\varepsilon_3\,|\,u_2)}{(u_2\,|\,u_2)}u_2\\
&= (0,0,1) - \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)\\
&= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).
\end{aligned}$$

   Parallèlement, on calcule les normes :

$$\|u_1\| = 1\,, \quad \|u_2\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \|u_3\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

   et donc, en divisant les u_i par leur norme, on obtient la base orthonormée (e_1, e_2, e_3) donnée par :

$$e_1 = (1,0,0)\,, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,2,0) \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,3)\,.$$

▶ Projecteurs orthogonaux

7. (a) Comme d'habitude, la bilinéarité et la symétrie ne posent pas de problème. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, par positivité de l'intégrale on a $\Phi(P) \geq 0$ et si cette quantité est nulle alors comme

P^2 est positive et continue on a que la fonction polynomiale P est nulle sur $[0,1]$. Le polynôme P possède donc une infinité de racines distinctes : il est nul.

(b) Notons P le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Alors $X^3 - P$ doit être orthogonal à $(1, X, X^2)$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$ donc s'écrit sous la forme $P = aX^2 + bX + c$. Les trois équations $\Phi(P,1) = \Phi(P,X) = \Phi(P,X^2) = 0$ nous permettent alors de déterminer que

$$P = \frac{1}{20}(30X^2 - 12X + 1)\,.$$

8. (a) La linéarité de l'intégrale et de la dérivation nous permettent de vérifier rapidement que Φ est bilinéaire symétrique.

Soit $f \in E$; alors par positivité de l'intégrale :

$$\Phi(f,f) = \int_0^1 ((f(t))^2 + (f'(t))^2)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

De plus, si $\Phi(f,f) = 0$ alors par continuité et positivité de $f^2 + (f')^2$, cette fonction est nulle. Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$, $(f(t))^2 + (f'(t))^2 = 0$ et donc par somme nulle de termes positifs $f(t)^2 = 0$. *In fine*, la fonction f est bien nulle.

En conclusion, Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, *i.e* un produit scalaire.

(b) On procède par analyse–synthèse pour démontrer la supplémentarité.

— *Analyse.* Soit $f \in E$ se décomposant en $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$. Alors, par résolution d'une EDL classique, on a l'existence de deux réels A, B tels que $f_2 = A\mathrm{ch} + B\mathrm{sh}$. Comme $f(0) = f_2(0)$ et $f(1) = f_2(1)$ on obtient :

$$A = f(0) \quad \text{et} \quad B = \frac{(f(1) - f(0))\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\,.$$

— *Synthèse.* On vérifie rapidement que si on pose

$$f = f(0)\mathrm{ch} + \frac{(f(1) - f(0))\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\mathrm{sh} \quad \text{et } f_1 = f - f_2$$

on a bien $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$.

Pour l'orthogonalité, fixons $f \in F$ et $g \in G$; alors, par IPP :

$$\begin{aligned}\Phi(f,g) &= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + [f(t)g'(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)g''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + 0 - \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc F et G sont des parties orthogonales.

(c) En vertu de la question précédente, si $f \in E$ alors son projeté orthogonal sur G est :

$$t \mapsto \frac{(f(1) - f(0))\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\,\mathrm{sh}(t)\,.$$

9. On procède de façon cyclique.

(i)⇒(ii) Supposons p orthogonal ; alors pour tout $x, y \in E$ on a $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $x_2, y_2 \in \mathrm{Im}(p)^\perp = \ker(p)$. De fait :

$$\langle p(x)\,,\, y\rangle = \langle x_1\,,\, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1\,,\, y_1\rangle$$

et

$$\langle x\,,\, p(y)\rangle = \langle x_1 + x_2\,,\, y_1\rangle = \langle x_1\,,\, y_1\rangle$$

d'où le résultat.

(ii)⇒(iii) Supposons que pour tous $x, y \in E$, $\langle p(x) \mid y\rangle = \langle x \mid p(y)\rangle$. Alors, pour $x \in E$ on a :

$$\|x\|^2 = \|x - p(x) + p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 + 2\,\langle p(x)\,,\, x - p(x)\rangle\ .$$

Or :

$$\langle p(x)\,,\, x - p(x)\rangle = \langle x\,,\, p(x - p(x))\rangle = \langle x\,,\, p(x) - p(p(x))\rangle = \langle x\,,\, 0\rangle = 0$$

d'où le résultat par croissance de la fonction racine carrée.

(iii) Supposons que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Puisque p est un projecteur, les espaces $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \ker p$ sont supplémentaires et p est la projection sur F parallèlement à G. Il s'agit alors de montrer que ces deux espaces sont orthogonaux. Soient $u \in F, v \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons le vecteur

$$x = u + \lambda \cdot v$$

On a $p(x) = u$ et $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ ce qui donne

$$0 \leqslant 2\lambda(u \mid v) + \lambda^2\|v\|^2$$

Si on suppose par l'absurde que $\langle u\,,\, v\rangle \neq 0$ alors

$$2\lambda\,\langle u\,,\, v\rangle + \lambda^2\|v\|^2 \underset{\lambda \to 0}{\sim} 2\lambda\,\langle u\,,\, v\rangle\ ,$$

ce qui est absurde car l'expression de droite n'est pas de signe constant. Ainsi les espaces F et G sont orthogonaux et p est donc un projecteur orthogonal.

10. Soit $E = \mathscr{C}^0([0;\pi], \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x$. On pose pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f_{a,b} : [0, \pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx \end{aligned}$$

ainsi que

$$\phi(a, b) = \int_0^\pi (\sin(x) - ax^2 - bx)^2\,\mathrm{d}x = \|\sin - f_{a,b}\|^2\ .$$

Considérons ensuite

$$F = \left\{f_{a,b} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)\ .$$

avec $f_1 = f_{0,1}$ et $f_2 = f_{1,0}$. F est un sous–espace vectoriel de E de dimension finie ; le minimum de ϕ est donc atteint quand $f_{a,b}$ est la projection orthogonale de sin sur F et vaut alors $d(x, F)^2 = \|\sin - p_F(\sin)\|^2$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

On sait qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_F(\sin) = af_2 + bf_1$. De plus, $\sin - p_F(\sin) \in F^\perp = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)^\perp$ donc

$$\begin{cases} \langle \sin - p_F(\sin), f_1\rangle = 0 \\ \langle \sin - p_F(\sin), f_2\rangle = 0 \end{cases}$$

Ceci équivaut à

$$\begin{cases} a\,\langle f_2, f_1\rangle + b\,\|f_1\|^2 = \langle \sin, f_1\rangle \\ a\,\|f_2\|^2 + b\,\langle f_1, f_2\rangle = \langle \sin, f_2\rangle \end{cases}$$

Or, par calcul direct :

$$\|f_1\|^2 = \frac{\pi^3}{3}\,,\quad \|f_2\|^2 = \frac{\pi^5}{5}\,,\quad \langle f_1, f_2\rangle = \frac{\pi^4}{4}\,,\quad \langle \sin, f_1\rangle = \pi\,,\quad \langle \sin, f_2\rangle = \pi^2 - 4$$

et donc :

$$\begin{cases} \frac{\pi^4}{4}a + \frac{\pi^3}{3}b = \pi \\ \frac{\pi^5}{5}a + \frac{\pi^4}{4}b = \pi^2 - 4 \end{cases}$$

On obtient :

$$a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5}\,,\quad b = -\frac{12}{\pi^2} + \frac{240}{\pi^4}$$

et donc, par le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} \|\sin - p_F(\sin)\|^2 &= \|\sin\|^2 - \|p_F(\sin)\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - \|af_2 + bf_1\|^2 \\ &= \|\sin\|^2 - a^2\,\|f_2\|^2 - 2ab\,\langle f_1, f_2\rangle - b^2\,\|f_1\|^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}\,. \end{aligned}$$

► Approfondissements

11. (a) Fixons une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et posons $A = (\langle x_j \, , \, e_i \rangle)_{i,j} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors, on a par calcul en base orthonormée :

$$\langle x_i \, , \, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle x_i \, , \, e_k \rangle \langle x_j \, , \, e_k \rangle$$

et donc la matrice sous–jacente au déterminant de Gram est exactement $A^T A$. De fait :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \det(A^T A) = \det(A)^2 \geq 0\,.$$

(b) Dans ce cas, on peut développer le déterminant par rapport à la première ligne (ou colonne !) et obtenir directement :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle x_1 \, , \, x_1 \rangle \, G(x_2, \dots, x_n) = \|x_1\|^2 G(x_2, \dots, x_n)\,.$$

(c) En reprenant les notations de la question (a), si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée alors $n > p$ et donc $\mathrm{rg}(A) \leq p < n$. De fait, $\mathrm{rg}(A^T A) \leq \mathrm{rg}(A) < p$ et donc $det(A^T A) = G(x_1, \dots, x_n) = 0$. Inversement, si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre (et donc une base de F) alors $\dim(F) = n$ et donc A est une matrice carrée $n \times n$. Par calcul dans une base orthonormée, A est la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_n)$ vers $(x_1, \dots x_n)$ et est donc inversible. De fait, $\det(A) \neq 0$ donc $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

(d) Si $x \in F$, les deux déterminants sont nuls. Sinon, si $x \notin F$, notons $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\,(x, e_1, \dots, e_n)$ et posons comme précédemment $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(x, e_1, \dots, e_n)$ de façon à avoir

$$\mathrm{G}\,(x, e_1, \dots, e_n) = \det(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})\,.$$

Notons également p le projecteur orthogonal sur F et

$$\mathrm{A}' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(x - p(x), e_1, \dots, e_n)$$

de sorte que

$$G(x - p(x), e_1, \dots, e_n) = \det((A')^\top A')\,.$$

Comme $p(x) \in F$ et que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de F , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\,.$$

Notons $\mathrm{C}, \mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n$ les colonnes de A : la matrice A' s'obtient à partir de A en effectuant l'opération de pivot

$$\mathrm{C} \leftarrow \mathrm{C} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{C}_i\,.$$

On en déduit que $\det\,(\mathrm{A}') = \det(\mathrm{A})$ donc

$$G\,(x, e_1, \dots, e_n) = \mathrm{G}\,(x - p(x), e_1, \dots, e_n)\,.$$

On utilise ensuite la question (b) : comme $x - p(x)$ est orthogonal à tous les e_i, on a :

$$G(x, e_1, \dots, e_n) = G(x - p(x), e_1, \dots, e_n) = \|x - p(x)\|^2 G(e_1, \dots e_n)$$

i.e

$$G(x, e_1, \dots, e_n) = d(x, F)^2 G(e_1, \dots, e_n)$$

et donc par positivité des termes et non nullité de $G(e_1, \dots, e_n)$ (questions (a) et (c) respectivement), on a :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \dots, e_n)}{G(e_1, \dots, e_n)}}\,.$$

12. (a) Trivial.

(b) L'application $\varphi : a \mapsto \varphi_a$ est une application linéaire de E dans $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$; il nous suffit donc de vérifier qu'elle est injective par argument dimensionnel.
Soit $a \in \ker(\varphi)$; alors $\varphi_a = 0$ donc en particulier, $\varphi_a(a) = \|a\|^2 = 0$, donc $a = 0$, ce qui permet de conclure.

13. Soit
$$x \in \ker(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)\,.$$
On a alors $u(x) = x$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. Par une récurrence triviale, on établit que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad nx = u^n(y) - y\,.$$
Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x = \frac{u^n(y) - y}{n}$$
et donc, d'après l'inégalité triangulaire,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x\| \leq \frac{\|u^n(y)\| + \|y\|}{n}.$$
Par une récurrence immédiate, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u^n(y)\| \leq \|y\|$$
et ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \|x\| \leq \frac{2\|y\|}{n}\,.$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient par le théorème d'encadrement, $\|x\| = 0$, donc $x = 0$. Ainsi
$$\ker(u\mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) = \{0\}.$$
Comme $\ker(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$, on déduit du théorème du rang que
$$\dim(\ker(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)) = \dim(E)$$
et donc que
$$E = \ker(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$$
car $\ker(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) \subset$ E.