

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

► **Produits scalaires**

1. Démontrer que l'application

$$S : ((x, y), (x', y')) \mapsto xx' + xy' + yx' + 3yy'$$

est une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^2 . Est-ce un produit scalaire ?

2. On note $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $(u_n)_n$ de nombres réels telles que la série $\sum u_n^2$ converge.
- Démontrer que pour tout couple (u, v) d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum u_n v_n$ converge.
 - Vérifier que $\ell^2(\mathbb{N})$ est un \mathbb{R} -e.v stable par produit.
 - Établir que l'application suivante définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$:

$$(u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$

3. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$; démontrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2 ; .$$

4. On définit sur l'espace vectoriel réel E des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} ,

$$\langle f | g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

- Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
- Établir que $\forall f \in E$,

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t) dt \right)^2 \leq 2 \left(f^2(1) + \int_0^1 f'^2(t) dt \right).$$

► **Orthogonalité**

5. (a) Démontrer que l'application

$$\Phi : (f, g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire sur l'espace E des fonctions continues 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- On pose $f_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}$. Démontrer que la famille (f_0, \sin, \cos) est orthonormale dans (E, Φ) .
6. (a) Démontrer que l'application

$$(\cdot | \cdot) : ((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}(xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z)$$

est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .

- Déterminer une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, (\cdot | \cdot))$.

► Projecteurs orthogonaux

7. (a) Démontrer que l'application

$$\Phi : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(x)Q(x) dx$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- (b) Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
8. On se place dans l'espace $E = \mathcal{C}^2([0, 1])$.
- (a) Démontrer que l'application

$$\Phi : (f, g) \mapsto \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$$

est un produit scalaire sur E .

- (b) Démontrer que les espaces $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$ sont supplémentaires orthogonaux.
- (c) Exprimer la projection orthogonale sur G .
9. Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E . Établir l'équivalence des trois propriétés suivantes :
- (i) p est orthogonal ;
- (ii) $\forall x, y \in E, \langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle$;
- (iii) $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
10. Calculer la quantité suivante :

$$\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^\pi (\sin(x) - ax^2 - bx)^2 dx.$$

► Approfondissements

11. *Déterminants de Gram.* Soit E un espace préhilbertien réel et soient $x_1, \dots, x_n \in E$. On pose :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \det(\langle x_i, x_j \rangle)_{i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \dots & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}.$$

- (a) Démontrer que $G(x_1, \dots, x_n) \geq 0$.
- (b) Vérifier que si pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ x_1 est orthogonal à x_i on a :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \|x_1\|^2 G(x_2, \dots, x_n).$$

- (c) Démontrer que $G(x_1, \dots, x_n)$ est nul si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée.
- (d) Soit F un s-e.v de E de dimension finie et soit (e_1, \dots, e_n) une base de F . Démontrer que pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, e_1, \dots, e_n)}{G(e_1, \dots, e_n)}}.$$

12. Soit E un espace euclidien.
- (a) Pour $a \in E$, vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_a : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle a, x \rangle \end{aligned}$$

est une forme linéaire.

(b) Démontrer que $a \mapsto \varphi_a$ réalise un isomorphisme (canonique) de E vers $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

13. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Établir que

$$E = \ker(u - \text{id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{id}_E).$$

► Exercices CCINP

39 On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $(x | y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

(b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire dans l^2 . On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n)_n \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$. Démontrer que φ est une application linéaire de l^2 dans \mathbb{R} et déterminer $k > 0$ tel que $\forall x \in l^2, |\varphi(x)| \leq k\|x\|$.

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer F^\perp (au sens de $(\cdot | \cdot)$). Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

63 Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$. On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x | x)}$.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, (u(x) | x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

76 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$. On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x | x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble

$$\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \mid f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

77 Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E . Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

(a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

78 Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E . On note $(x | y)$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

(a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x) | u(y)) = (x | y)$.

(b) Démontrer que u est bijectif.

On pose

$$\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|\}.$$

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Prouver que :

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } E.$$

79 Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Démontrer que

$$\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0.$$

2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On pose :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad (f | g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

[80] Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Démontrer que

$$(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E .

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

[81] On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{Tr}(A^T A')$, où $\text{Tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A' . On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Démontrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
- Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
- Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

[82] Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

- Démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

[92] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n . On pose : $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$ où Tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

- Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E . Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E . On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
 - Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
- Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E . Déterminer F^\perp .