

## PROBABILITÉS

## ► Espaces probabilisés

1. Si on note  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) l'événement "tirer une boule noir au premier (resp. second) lancer", on a, par probabilité uniforme :

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}.$$

2. Le nombre de tels lancers contenant les 6 nombres de 1 à 6 est de  $6!$  (le problème est équivalent à la recherche des 6-listes ordonnées de  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ ). L'univers correspondant à cette expérience étant  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^6$  muni de sa probabilité uniforme, la probabilité recherchée est :

$$\frac{6!}{|\Omega|} = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324} \cong 0.015.$$

3. Notons que l'univers considéré ici (l'ensemble des mains de 5 cartes) est de cardinal  $\binom{52}{5}$  et est muni de sa probabilité uniforme, la probabilité de tirer une main donnée étant constante.

- (a) Pour réaliser une main contenant exactement 3 cartes de carreau, il faut...tirer 3 cartes de carreau (parmi 13) et 2 cartes d'autre(s) couleur(s) (parmi 39). Par probabilité uniforme, la probabilité recherchée est donc :

$$\frac{\binom{13}{3} \times \binom{39}{2}}{|\Omega|} \cong 0,08.$$

- (b) Pour construire une main ne contenant aucun paire, il faut choisir 5 valeurs distinctes (parmi 13 possibilités) puis pour chacune d'entre elle choisir l'une des 4 cartes portant cette valeur. Si on note  $A$  l'événement "la main contient au moins une paire", on a donc :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\binom{13}{5} \times 4^5}{|\Omega|} \cong 0,49$$

4. Les événements  $A_k$  : "obtenir le nombre  $k$ " pour  $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$  forment un système complet d'événements et on a, par hypothèse, l'existence d'un réel  $\lambda$  tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(A_k) = \lambda k.$$

Ainsi, on a :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^6 A_k\right) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^6 \lambda k = \lambda \times 21$$

et donc  $\lambda = \frac{1}{21}$ . Ainsi, si on note  $B$  l'événement "obtenir un nombre pair", on a, par incompatibilité :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_6) = \frac{2 + 4 + 6}{21} = \frac{4}{7}.$$

5. On part du principe qu'une année contient 365 jours et donc un univers pertinent pour notre expérience aléatoire est  $\Omega = \llbracket 1, 365 \rrbracket^r$ , muni de sa probabilité uniforme (on suppose la natalité globalement uniforme sur l'année, ce qui est légèrement inexact selon l'INSEE). Si  $r > 365$ , la probabilité recherchée est nulle. Sinon, en notant  $A$  l'événement "les  $r$  personnes considérées ont des dates d'anniversaires différentes" on a, par uniformité :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{(365)_r}{|\Omega|},$$

où  $(365)_r = \frac{365!}{(365-r)!}$  correspond aux nombres d'arrangements de  $r$  éléments parmi 365. Notez que l'on tient ici compte de l'ordre des dates, car on en a tenu compte dans la modélisation de  $\Omega$ . *In fine*, on a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{365!}{(365-r)!365^r}.$$

Par exemple, pour une classe de 44 élèves, on obtient une probabilité inférieure à 0,1 : un phénomène parfois appelé *paradoxe des anniversaires*.

6. Notons  $R_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , l'événement "la  $i$ -ième boule tirée est rouge". À composition de l'urne fixée, chaque tirage est équiprobable et donc on a, par formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap R_3}(R_4) \\ &= \frac{r}{n} \times \frac{r-1}{n-1} \times \frac{r-2}{n-2} \times \frac{r-3}{n-3}. \end{aligned}$$

7. (a) On note  $U_i$  l'événement "on a choisi l'urne  $\mathcal{U}_i$ " pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ;  $(U_0, \dots, U_n)$  constitue donc un système complet d'événements et donc, par formule des probabilités totales on a :

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(B_k) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(U_i) \mathbb{P}_{U_i}(B_k) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{2}.$$

Vu que la sélection de l'urne est uniforme, ce problème est similaire au fait d'effectuer des tirages avec remise dans une urne "globale" contenant le même nombre de boules noires et blanches.

- (b) Soient  $i, j \geq 1$  distincts. Alors, par formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_i \cap B_j) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(U_k) \mathbb{P}_{U_k}(B_i \cap B_j).$$

Or, une fois l'urne fixée les tirages  $i$  et  $j$  sont indépendants, *i.e*

$$\mathbb{P}_{U_k}(B_i \cap B_j) = \mathbb{P}_{U_k}(B_i) \mathbb{P}_{U_k}(B_j)$$

et donc

$$\mathbb{P}(B_i \cap B_j) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(U_k) \mathbb{P}_{U_k}(B_i) \mathbb{P}_{U_k}(B_j) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{2n+1}{6n}.$$

Cependant,  $\mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(B_j) = \frac{1}{4}$  et on vérifie rapidement qu'il n'existe aucune valeur de  $n \in \mathbb{N}^*$  pour laquelle ces deux probabilités sont égales. Les événements  $B_i$  et  $B_j$  ne sont donc pas indépendants.

8. Notons  $A$  l'événement "l'assuré est enclin aux accidents" et  $N$  l'événement "l'assuré a eu un accident dans l'année". On a alors, en appliquant la formule des probabilités totales *via* le système complet d'événements  $(A, \bar{A})$  :

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(N) + \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}_{\bar{A}}(N) = 0,2 \times 0,5 + 0,8 \times 0,1 = 0,18.$$

9. (a) Si on note  $B$  l'événement "la boule prélevée est blanche" et  $U_i$  l'événement "on choisit l'urne  $\mathcal{U}_i$ " pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la famille  $(U_1, \dots, U_n)$  constitue un système complet d'événements et donc par formule des probabilités totales on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(U_i) \mathbb{P}_{U_i}(B).$$

Le tirage dans l'urne  $\mathcal{U}$  étant uniforme, on a de plus :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(U_i) = \frac{i}{\sum_{k=1}^n k} = \frac{2i}{n(n+1)}$$

et donc

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n(n+1)} \times \frac{i}{n} = \frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n+1}{3n}.$$

- (b) Par formule de Bayes, on a :

$$\mathbb{P}_B(U_1) = \frac{\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}_{U_1}(B) = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{3n}{2n+1} \times \frac{1}{n} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}.$$

10. Notons  $V$  l'événement "a répondu vrai" et  $C$  l'événement "connaissait la réponse". On a alors, par seconde formule de Bayes appliqué au système complet d'événements  $(C, \bar{C})$  :

$$\mathbb{P}_V(C) = \frac{\mathbb{P}_C(V)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)\mathbb{P}_C(V) + \mathbb{P}(\bar{C})\mathbb{P}_{\bar{C}}(V)} = \frac{pm}{1 + p(m-1)}.$$

11. (a) Notons  $S$  l'événement "un colis se perd" et  $A, B, C$  les événements "le colis a été acheminé par le transporteur A, B, C" (respectivement). Alors, par formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}_A(S)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_B(S)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_C(S)\mathbb{P}(C) \\ &= 0,01 \times \frac{3}{4} + \times \frac{1}{8} + 0,03 \times \frac{1}{8} \\ &= 0,01375\end{aligned}$$

- (b) On trouve, par formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_S(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}_A(S)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(S)} \cong 0,545$$

## ► Variables aléatoires

12. Remarquons qu'un univers pertinent est ici  $\Omega = \mathcal{P}_n(\llbracket 1, N \rrbracket)$  muni de sa probabilité uniforme.

- (a) — *Loi de X*.  $X$  étant le maximum du tirage, on a  $X(\Omega) = \llbracket n, N \rrbracket$ . Chaque tirage étant équiprobable on a ensuite, pour tout  $k \in X(\Omega)$  :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{|\Omega|} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

car  $X = k$  si et seulement si les tirage contient  $k$  et  $n-1$  entiers de  $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$ .

- *Loi de Y*. Similairement, on remarque que  $Y(\Omega) = \llbracket 1, N-n+1 \rrbracket$  et que si  $k \in Y(\Omega)$  on a :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{|\Omega|} = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

- (b) Non ; il suffit de remarquer que si on fixe  $N = 3$  et  $n = 2$  alors

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 2).$$

13. Les lois conjointes et marginales sont données par les tableaux suivants.

— *Sans remise* :

$X \setminus Y$	1	2	3	$\mathbb{P}_X$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
$\mathbb{P}_Y$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

— *Avec remise* :

$X \setminus Y$	1	2	3	$\mathbb{P}_X$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\mathbb{P}_Y$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

On remarque que dans ces deux situations les lois marginales sont identiques alors que la loi conjointe diffère. Les premières ne déterminent donc pas la seconde.

14. Soit  $k \in \llbracket 0, \cdot \rrbracket$ ; alors

$$\mathbb{P}(n - X = k) = \mathbb{P}(X = n - k) = \binom{n}{n - k} p^{n-k} (1-p)^k = \binom{n}{k} p^{n-k} (1-p)^k$$

et donc  $n - X \sim \mathcal{B}(n, 1-p)$ . Ceci n'est pas surprenant : une loi binomiale compte le nombre de succès dans une expérience de Bernoulli donc son complémentaire à  $n$  en dénombre les échecs (qui sont les succès de l'expérience "opposée"!).

15. Commençons par remarquer que  $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2, 2n \rrbracket$ . Ensuite, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements  $(X = \ell)_{\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}(X = \ell) \mathbb{P}_{X=\ell}(X + Y = k) \\ &= \sum_{\ell=1}^n \mathbb{P}(X = \ell) \mathbb{P}(Y = k - \ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = \ell) \mathbb{P}(Y = k - \ell) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{P}(Y = k - \ell) \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Card} \{ \ell \in \llbracket 1, k \rrbracket \mid k - \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket \} \end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbb{P}(X + Y = k) \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{si } k \leq n+1; \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

16. Les deux fonctions considérées étant injectives sur  $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, \cdot \rrbracket, \quad \mathbb{P}((X-1)^2 = (k-1)^2) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(e^X = e^k) = \frac{1}{n}$$

et donc  $(X-1)^2 \sim \mathcal{U}(0, 1, 4, \dots, (n-1)^2)$  et  $e^X \sim \mathcal{U}(e, e^2, \dots, e^n)$ .

17. (a) On trouve  $p_0 = 1, q_0 = 0, r_0 = 0, p_1 = 0, q_1 = 1$  et  $r_1 = 0$ . Ensuite, par formule des probabilités totales appliquée au système  $(X_n = k)_{k \in \llbracket 0, \cdot \rrbracket}$  :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1}=0) \mathbb{P}(X_n=0) + \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=0) \mathbb{P}(X_n=1) + \mathbb{P}_{X_n=2}(X_{n+1}=0) \mathbb{P}(X_n=2) \\ &= 0 \times p_n + \frac{1}{4} \times q_n + 0 \times r_n \\ &= \frac{1}{4} q_n \end{aligned}$$

et, similairement :

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= 1 \times p_n + \frac{1}{2} \times q_n + 1 \times r_n = p_n + \frac{1}{2} q_n + r_n \\ r_{n+1} &= 0 \times p_n + \frac{1}{4} \times q_n + 0 \times r_n = \frac{1}{4} q_n. \end{aligned}$$

(b) On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$q_{n+2} = p_{n+1} + \frac{1}{2} q_{n+1} + r_{n+1} = \frac{1}{4} q_n + \frac{1}{2} q_{n+1} + \frac{1}{4} q_n = \frac{1}{2} q_{n+1} + \frac{1}{2} q_n.$$

(c) L'équation caractéristique liée à la relation de récurrence linéaire  $q_{n+2} - \frac{1}{2} q_{n+1} - \frac{1}{2} q_n = 0$  est  $X^2 - \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} = 0$  dont les racines sont  $-\frac{1}{2}$  et  $1$ . Il s'ensuit qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ . Les conditions initiales  $q_0 = 0$  et  $q_1 = 1$  fournissent  $\lambda = \frac{2}{3}$  et  $\mu = -\frac{2}{3}$ . Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$q_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_{n+1} = r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$p_n = r_n = \frac{1}{6} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

De plus, on a vu que  $p_0 = 1$  et que  $r_0 = 0$ .

(d) Puisque  $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ ,  $q_n \rightarrow \frac{2}{3}$  et  $p_n, r_n \rightarrow \frac{1}{6}$ .

## ► Approfondissements

18. (a) Notons  $R$  la matrice  $(r_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Pour tout  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_{i,j} \equiv r_{i,j}[2]$ . Par compatibilité de la relation de congruence avec la somme et le produit,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} \equiv \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n r_{\sigma(i),i}[2]$$

et donc  $\det A \equiv \det B[2]$ .

- (b) Par construction,  $\text{card}(\mathcal{M}) = 9!$ .  
 (c) D'après la première question, l'application qui à  $M \in \Omega$  associe la matrice constituée des restes des divisions euclidiennes des coefficients de  $A$  par 2 a pour image  $\Delta$ . De plus, chaque élément de  $\Delta$  a  $5!4!$  antécédents par cette application ( $5!$  façons de placer les chiffres impairs et  $4!$  façons de placer les chiffres pairs). De fait,

$$\text{Card}(\Omega) = 5!4! \text{card}(\Delta).$$

- (d) Il y a trois façons de placer la colonne de 1. Une fois cette colonne placée, les deux 1 restants ne peuvent appartenir à la même colonne sinon on aurait une colonne de 0 et donc un déterminant nul (non impair). Les deux 1 restants ne peuvent être situés sur la même ligne sinon les deux colonnes où ils figurent seraient égales et donc le déterminant serait nul. Il y a donc  $3 \times 2 = 6$  façons de placer les deux 1 restants. Les matrices obtenues sont bien de déterminants impairs puisque par échange de lignes et de

colonnes, leurs déterminants sont égaux au signe près à  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ . On en déduit

que  $\text{Card}(K_1) = 3 \times 6 = 18$ .

- (e) Il y a  $\binom{3}{2} = 3$  façons de choisir les deux colonnes possédant un unique 0. Dans ces deux colonnes, les zéros ne peuvent figurer sur la même ligne sinon les deux colonnes sont égales et le déterminant est nul. Il y a donc  $3 \times 2 = 6$  façons de placer les 0 dans ces deux colonnes. Il y a enfin 3 façons de placer le 1 restant dans la colonne restante. Les matrices ainsi obtenues sont bien de déterminants impairs puisque par échange de

lignes et de colonnes, leurs déterminants sont égaux au signe près à  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ .

On en déduit que  $\text{card}(K_2) = 3 \times 6 \times 3 = 18 = 54$ .

Les deux ensembles dénombrés dans les deux questions précédentes sont disjoints puisqu'une matrice de  $\Delta$  possédant une colonne avec trois coefficients égaux à 1 a forcément une colonne avec plus de deux coefficients égaux à 0. Ces deux ensembles sont également de réunion  $\Delta$  puisqu'une matrice de  $\Delta$  qui ne contient aucune colonne avec trois coefficients égaux à 1 a forcément deux colonnes avec exactement un coefficient égal à 0. Ces deux ensembles forment donc une partition de  $\Delta$  de sorte que  $\text{card}(\Delta) = K_1 + K_2 = 72$ . In fine,  $\text{card}(\Omega) = 72 \times 5! \times 4!$ .

(f) On se place dans un cadre de probabilité uniforme sur  $\mathcal{M}$  et donc :

$$p = \frac{\text{card}(\Omega)}{\text{card}(\mathcal{M})} = \frac{72 \times 5! \times 4!}{9!} = \frac{4}{7}.$$

19. (a) La probabilité d'ouvrir la boîte gauche vide et qu'il reste  $r$  allumettes dans la boîte droite, est la probabilité d'avoir choisi  $N$  fois la boîte gauche et  $N - r$  fois la boîte droite pendant les  $2N - r$  premiers choix et d'avoir choisi la dernière fois la boîte gauche, soit :

$$\binom{2N - r}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{1}{2}\right)^{N-r} \times \frac{1}{2} = \frac{\binom{N-r}{N}}{2^{2N-r+1}}.$$

Puisque les boîtes gauche et droite jouent des rôles symétriques, la probabilité d'ouvrir la boîte droite vide et qu'il reste  $r$  allumettes dans la boîte gauche est la même. Ainsi :

$$\mu_{r,N} = 2 \frac{\binom{2N-r}{N}}{2^{2N-r+1}} = \frac{\binom{2N-r}{N}}{2^{2N-r}}.$$

- (b) On a  $\mu_{0,N} = \frac{\binom{N}{N}}{2^{2N}}$ . En utilisant la formule de Stirling, on obtient

$$\mu_{0,N} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{N\pi}}.$$

- (c) Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $r \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ; alors on a :

$$\begin{aligned} (2N + 2)\mu_{r+1,N+1} &= 2(N + 1) \frac{\binom{2(N+1)-(r+1)}{N+1}}{2^{2(N+1)-(r+1)}} \\ &= \frac{(N + 1)\binom{2N+1-r}{N+1}}{2^{2N-r}} \\ &= \frac{(2N + 1 - r)\binom{2N-r}{N}}{2^{2N-r}} \\ &= (2N + 1 - r)\mu_{r,N}. \end{aligned}$$

- (d) Soit  $N \in \mathbb{N}$ ; par définition, on a :

$$E_N = \sum_{r=0}^N r\mu_{r,N}.$$

D'après la question précédente, pour tout  $r \in \llbracket 0, N \rrbracket$  on a :

$$r\mu_{r,N} = (2N + 1)\mu_{r,N} - (2N + 2)\mu_{r+1,N+1}$$

et donc

$$\sum_{r=0}^N r\mu_{r,N} = (2N + 1) \sum_{r=0}^N \mu_{r,N} - 2(N + 1) \sum_{r=0}^N \mu_{r+1,N+1}$$

soit, en changeant d'indice dans la dernière somme :

$$E_N = (2N + 1) \sum_{r=0}^N \mu_{r,N} - 2(N + 1) \sum_{r=1}^{N+1} \mu_{r,N+1}$$

Comme le nombre d'allumettes restantes est un entier compris entre 0 et  $N$  on a

$$\sum_{r=0}^N \mu_{r,N} = 1. \text{ Pour la même raison, } \sum_{r=0}^{N+1} \mu_{r,N+1} = 1 \text{ ergo :}$$

$$E_N = (2N + 1) - 2(N + 1)(1 - \mu_{0,N+1}).$$

Or  $\mu_{0,N+1} = \frac{\binom{2N+2}{N+1}}{2^{2N+2}}$  donc

$$\begin{aligned} E_N &= \frac{(N+1)\binom{2N+2}{N+1}}{2^{2N+1}} - 1 \\ &= \frac{(2N+2)\binom{2N+1}{N}}{2^{2N+1}} - 1 \\ &= \frac{(N+1)\binom{2N+1}{N}}{2^{2N}} - 1 \\ &= \frac{(N+1)\binom{2N+1}{N+1}}{2^{2N}} - 1 \\ &= \frac{(2N+1)\binom{2N}{N}}{2^{2N}} - 1 \end{aligned}$$

(e) En utilisant à nouveau la formule de Stirling, on obtient

$$E_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{N}{\pi}}.$$