Probabilités

▶ Espaces probabilisés

1. Une urne contient 4 boules blanches et 2 noires. On tire une boule, puis on la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur avant de procéder à un second tirage. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?
2. On lance six fois un dé à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir chacun des six numéros de 1 à 6 ?
3. Dans un jeu de 52 cartes, on distribue 5 cartes à un joueur.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il ait en main exactement trois cartes de carreau ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il ait en main une paire ?
4. On lance un dé à 6 faces truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir chaque numéro $k \in [\![1, 6]\!]$ soit proportionnelle à k. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
5. En négligeant les années bissextiles, quelle est la probabilité que r personnes aient leurs anniversaires à des dates deux à deux distinctes ?
6. Soient $n \geq 1$ et $r \geq 4$. On considère une urne contenant n boules dont r sont rouges. On tire quatre boules successivement et sans remise. Quelle est la probabilité que les quatre boules tirées soient rouges ?
7. On considère $n+1$ urnes numérotées $\mathscr{U}_0, \ldots, \mathscr{U}_n$ telles que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ l'urne $\mathscr{U}_i$ contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. On choisit au hasard (de façon uniforme) une urne et on effectue une succession de tirages avec remise. On note, pour $k \geq 1$, B_k l'événement "tirer une boule blanche au k–ième tirage".
   (a) Calculer la probabilité de B_k pour $k \in \mathbb{N}^*$. Expliquer ce résultat.
   (b) Soient $i, j \geq 1$ distincts. Les événements B_i et B_j sont–ils indépendants ?
8. Une compagnie d'assurance classe ses clients en deux catégories : ceux ayant peu d'accidents (80%) et les autres. Un client appartenant à la première catégorie à une probabilité de $0,1$ d'avoir au moins un accident dans l'année, probabilité qui passe à $0,5$ pour la seconde catégorie. Quelle est la probabilité qu'un assuré soit victime d'un accident dans l'année ?
9. Soit $n \geq 1$. On considère une urne $\mathscr{U}$ contenant des jetons numérotés comme suit : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne contient k jetons de numéro k. On possède également n urnes numérotées $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_n$ telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ l'urne $\mathscr{U}_i$ contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. L'expérience est la suivante : on tire un jeton dans $\mathscr{U}$ et on note k son numéro ; on tire ensuite une boule dans l'urne $\mathscr{U}_k$ correspondante.
   (a) Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'une boule blanche tirée provienne de l'urne $\mathscr{U}_1$?
10. Un étudiant répond à une question de type QCM où sont proposées m réponses. Si il connait la réponse, il la donne, dans le cas contraire il répond au hasard. Sachant que la probabilité qu'il connaisse la bonne réponse est un certain $p \in]0, 1[$ et qu'il a donné la bonne réponse, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?
11. Une société de vente emploie trois transporteurs A, B et C pour faire livrer ses colis. Elle utilise le transporteur A les 3/4 du temps et une fois sur 8 chacun des deux autres. Chaque transporteur égare respectivement 1%, 2% et 3% des colis qui lui sont confiés.
    (a) Calculer la probabilité qu'un colis se perde.
    (b) Un client se plaint de n'avoir pas reçu sa commande. Quelle est la probabilité que le transporteur A soit responsable ?

▶ Variables aléatoires

12. Un joueur prélève n boules dans une urne contenant N tels objets numérotés de 1 à N. On considère les v.a X et Y correspondant respectivement au plus grand et au plus petit numéro des boules prélevées.
    (a) Déterminer les lois de X et Y.

(b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

13. Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On tire deux boules, en notant X le premier numéro et Y le second. Donner les lois conjointe et marginales de (X, Y) dans le cas où le tirage se fait sans remise et dans celui où il se fait avec remise. Conclusion ?
14. Démontrer que si X est une v.a de loi $\mathscr{B}(n, p)$ alors $n - X$ suit la loi $\mathscr{B}(n, 1-p)$. Interpréter.
15. Soient X, Y deux v.a indépendantes de loi $\mathscr{U}(1, \ldots, n)$. Déterminer la loi de $X + Y$.
16. Soit X une v.a de loi $\mathscr{U}(1, \ldots, n)$. Déterminer la loi de $(X-1)^2$ et e^X.
17. *Une chaîne de Markov* Une boîte A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient deux jetons portant le numéro 1. Un *échange* consiste à tirer un jeton dans chaque boîte et à les échanger. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la somme des numéros des jetons contenus dans la boîte A après n échanges. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $r_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$.
    (a) Calculer p_0, q_0, r_0 et p_1, q_1, r_1, puis exprimer $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ en fonction de p_n, q_n, r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    (b) Déterminer une relation entre q_n, q_{n+1}, q_{n+2} pour tout $n \geq 0$.
    (c) Exprimer p_n, q_n et r_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
    (d) Déterminer les limites des suites $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ et $(r_n)_n$.

► Approfondissements

18. On dispose de 9 jetons numérotés de 1 à 9 . On considère une matrice carrée de taille 3 composée de ces 9 jetons. On cherche à déterminer la probabilité p pour que le déterminant de la matrice soit impair.
    (a) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}), n \geq 2$. Montrer que le déterminant de A est congru modulo 2 au déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes $r_{i,j}$ de la division euclidienne des $a_{i,j}$ par 2.
    (b) On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons. Déterminer $\operatorname{card}(\mathscr{M})$.
    (c) On définit $\Omega = \{\mathrm{M} \in \mathscr{M} \mid \det(\mathrm{M}) \equiv 1\,[2]\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1 , quatre coefficients sont nuls et de déterminant impair. Donner une relation entre $\operatorname{card}(\Omega)$ et $\operatorname{card}(\Delta)$.
    (d) On considère une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1 . Déterminer le nombre K_1 de ces matrices.
    (e) On considère une matrice de Δ dont 2 colonnes possèdent exactement un coefficient nul. Déterminer le nombre K_2 de ces matrices. Calculer $\operatorname{card}(\Delta)$. En déduire $\operatorname{card}(\Omega)$.
    (f) Déterminer la probabilité p.
19. Une personne a dans chacune de ses poches droite et gauche une boîte d'allumettes de contenance N chacune. Lorsqu'il désire une allumette, il choisit au hasard une de ses poches (chacune avec un probabilité 1/2). On considère le moment où, pour la première fois, il ouvre une boîte vide. A ce moment, l'autre boîte peut contenir un nombre d'allumettes compris entre 0 et N. On note $\mu_{r,N}$ la probabilité qu'elle en contienne r.
    (a) Calculer $\mu_{r,N}$ pour $r \in [\![0, N]\!]$.
    (b) Donner un équivalent de $\mu_{0,N}$ lorsque N tend vers $+\infty$.
    (c) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tour $r \in [\![0, N]\!]$
    $$(2N+2)\mu_{r+1,N+1} = (2N+1-r)\mu_{r,N}$$
    (d) On note E_N le nombre moyen d'allumettes restantes lorsque la personne ouvre une boîte vide pour la première fois (quand les deux boîtes contiennent N allumettes au départ). Montrer que
    $$E_N = \frac{(2N+1)}{2^{2N}}\binom{2N}{N} - 1$$
    (e) Déterminer un équivalent de E_N lorsque N tend vers $+\infty$.

▶ Exercices CCINP

98 Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p(p \in]0,1[)$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}, P(Y=k \mid X=i)$.
   (b) Prouver que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre. *Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :* $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

104 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 . On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques égaleme numérotés de 1 à 3 . On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartime restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X=2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

105
1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués). Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6 . Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

107 On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement «la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

109 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2 . On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.