

DÉTERMINANT

Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et n est un entier fixé dans \mathbb{N}^* .

► Groupe symétrique

1. (a) Notons σ la permutation considérée. On a $\sigma(1) = 7, \sigma(7) = 4$ et $\sigma(4) = 1$, d'où un premier cycle $(1\ 7\ 4)$. On procède de même à partir d'un élément de $\llbracket 1, 10 \rrbracket \setminus \{1, 4, 7\}$, par exemple 2, pour lequel on a $\sigma(2) = 6, \sigma(6) = 8, \sigma(8) = 10$ et $\sigma(10) = 2$, d'où un second cycle $(2\ 6\ 8\ 10)$. On continue à partir d'un élément de $\llbracket 1, 10 \rrbracket \setminus \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$, par exemple 3, pour lequel on a $\sigma(3) = 9, \sigma(9) = 5$ et $\sigma(5) = 3$, d'où un troisième cycle $(3\ 9\ 5)$. La réunion des supports de ces trois cycles étant $\llbracket 1, 10 \rrbracket$, la décomposition est terminée :

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{array} \right) = (1\ 7\ 4)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5).$$

- (b) Similairement :

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{array} \right) = (1\ 3\ 10\ 6)(5\ 7)(8\ 9).$$

- (c) Notons $\rho = (1\ 3\ 5\ 2), \sigma = (2\ 4\ 1\ 7)$ et $\tau = (5\ 8)$. On a $\rho\sigma\tau(1) = \rho\sigma(1) = \rho(7) = 7$ et $\rho\sigma\tau(7) = \rho\sigma(7) = \rho(2) = 1$, d'où une première transposition $(1\ 7)$. Par ailleurs, $\rho\sigma\tau(2) = \rho\sigma(2) = \rho(4) = 4$ et on obtient de même $\rho\sigma\tau(4) = 3, \rho\sigma\tau(3) = 5, \rho\sigma\tau(5) = 8$ et $\rho\sigma\tau(8) = 2$, d'où le cycle $(2\ 4\ 3\ 5\ 8)$. Enfin $\rho\sigma\tau(6) = 6$ et le cycle (6) est donc omis.
In fine :

$$(1\ 3\ 5\ 2)(2\ 4\ 1\ 7)(5\ 8) = (1\ 7)(2\ 4\ 3\ 5\ 8).$$

- (d) On a similairement $(2\ 6)(4\ 2\ 1\ 5)(3\ 2)(3\ 1\ 5) = (1\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5)$.

- (e) On trouve $(1\ 3)(3\ 2\ 1\ 4)(3\ 1\ 4)(2\ 1\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)$.

2. (a) Puisque la signature est un morphisme de groupe,

$$\varepsilon((1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)) = \varepsilon((1\ 2))\varepsilon((1\ 4))\varepsilon((5\ 6)) = (-1)^3 = -1.$$

- (b) Rappelons que la signature d'un p -cycle est $(-1)^{p-1}$. Ainsi la signature du 5-cycle $(1\ 5\ 3\ 2\ 4)$ est $(-1)^4 = 1$.

- (c) Puisque la signature est un morphisme de groupe à valeurs dans $\{\pm 1\}$, une permutation et son inverse ont même signature, ainsi $\varepsilon((5\ 3\ 2\ 4)^{-1}) = \varepsilon((1\ 5\ 2\ 4)) = 1$, d'après la question précédente.

- (d) On a $\varepsilon((1\ 3\ 2\ 4)) = (-1)^{4-1} = -1$, ainsi $\varepsilon((1\ 3)^{37}) = \varepsilon((1\ 3\ 2\ 4))^{37} = (-1)^{37} = -1$.

- (e) On a

$$\varepsilon(((1\ 3)(2\ 6\ 7)^{-1}(4\ 7\ 3\ 1\ 2))) = \varepsilon((1\ 3))\varepsilon((2\ 6\ 7))\varepsilon((4\ 7\ 3\ 1\ 2)) = -1 \times (-1)^{3-1} \times (-1)^{5-1} = -1.$$

- (f) On a $\varepsilon(((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2))^{64}) = (\varepsilon((1\ 3)(2\ 6\ 7)(4\ 7\ 3\ 1\ 2)))^{64} = 1$.

3. Soit (ij) une transposition. Si $i = 1$ ou $j = 1$, la transposition (ij) est bien du type de l'énoncé. Sinon, on a $(ij) = (1\ j)(1\ i)(1\ j)$. Comme toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions et que toute transposition s'écrit comme un produit de transpositions du type $(1\ i)$, toute permutation s'écrit bien comme un produit de transpositions du type $(1\ i)$.

4. On obtient par calcul direct $\sigma(a_1 \dots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k))$.

► Calculs de déterminants

5. Par calcul direct (penser au pivot si besoin), on trouve :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Le déterminant suivant est triangulaire par bloc, et on trouve :

$$, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -17 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -54$$

Pour le dernier déterminant, on réalise les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ puis on développe par rapport à la première ligne, obtenant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & c-a \\ ab & a(c-a) & b(c-a) \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a).$$

6. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin(x) & \cos(x) \\ 1 & \sin(y) & \cos(y) \\ 1 & \sin(z) & \cos(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin(x) & \cos(x) \\ 0 & \sin(y) - \sin(x) & \cos(y) - \cos(x) \\ 0 & \sin(z) - \sin(x) & \cos(z) - \cos(x) \end{vmatrix}.$$

On développe ensuite par rapport à la première colonne et on obtient, en se rappelant de ses formules de différences de sinus et cosinus :

$$4 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \sin\left(\frac{z-x}{2}\right) \sin\left(\frac{y-z}{2}\right).$$

7. Commençons par développer par rapport à la première ligne :

$$D_n = aD_{n-1} - b \begin{vmatrix} c & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & & \\ \vdots & c & a & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & & c & a \end{vmatrix} = aD_{n-1} - bcD_{n-2}.$$

La suite $(D_n)_n$ est donc définie par une relation de récurrence double et $(D_0, D_1) = (1, a)$. L'équation caractéristique associée à la suite $(D_n)_n$ est donc $X^2 - aX + bc = 0$, de discriminant $a^2 - 4bc$.

— Si $a^2 = 4bc$, la racine double de l'équation caractéristique étant $\frac{a}{2}$, on trouve (rapidement) :

$$D_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n}.$$

— Si $a^2 \neq 4bc$, l'équation caractéristique admet deux racines distinctes (sur \mathbb{C}) u et v et il existe deux scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que :

$$D_n = \lambda u^n + \mu v^n.$$

Comme $D_0 = \lambda + \mu = 1$ et $D_1 = \lambda u + \mu v = a$, on peut trouver une expression explicite de λ et μ en résolvant un système de deux équations à deux inconnues.

8. Soit $n \geq 3$; alors :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & (-1) & \vdots \\ \vdots & (1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

via les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_{k-1}$ pour k variant de n à 2

$$= \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ \vdots & 1 & \ddots & (-1) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & (1) & & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{via } C_1 \leftarrow C_1 + C_n$$

$$= \begin{vmatrix} n-1 & & & & \\ 0 & -2 & & (*) & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & (0) & \ddots & -2 & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

via $C_k \leftarrow C_k + C_n$ pour k variant de 0 à $n-1$

$$= (-1)^{n-1} 2^{n-2} (n-1).$$

9. Pour $x \in \mathbb{K}$, on a, via les opérations $C_k \leftarrow C_k - C_1$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c-a & \dots & \dots & c-a \\ b+x & a-b & c-b & \dots & c-b \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a-b & c-b \\ b+x & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = \alpha + \beta x$$

par linéarité relativement à la première colonne, avec :

$$\alpha = \begin{vmatrix} a & c-a & \dots & \dots & c-a \\ b & a-b & c-b & \dots & c-b \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a-b & c-b \\ b & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{vmatrix} 1 & c-a & \dots & \dots & c-a \\ 1 & a-b & c-b & \dots & c-b \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a-b & c-b \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

On a donc bien $f \in \mathbb{K}_1[x]$. De plus, les déterminants $f(-b)$ et $f(-c)$ étant triangulaires et respectivement égaux à $(a-b)^n$ et $(a-c)^n$, on obtient rapidement les valeurs de α et β si $b \neq c$ et *in fine* :

$$D(a, b, c) = f(0) = \alpha = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

Si $b = c$, on obtient la valeur de $D(a, b, c)$ à partir du déterminant initial en *via* $C_1 \leftarrow \sum_{k=1}^n C_k$ puis $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, obtenant :

$$D(a, b, b) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

10. (a) Comme

$$\begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ T & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z + XT & X \\ YT & Y \end{pmatrix},$$

il suffit de poser $X = B, Y = D, Z = A - BD^{-1}C$ et $T = D^{-1}C$.

(b) Par produit de déterminants :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & X \\ 0 & Y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z & 0 \\ T & I_n \end{vmatrix}.$$

Or, les déterminants considérés étant triangulaires par blocs, on a :

$$\begin{vmatrix} I_n & X \\ 0 & Y \end{vmatrix} = \det(I_n) \det(Y) \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} Z & 0 \\ T & I_n \end{vmatrix} = \det(Z) \det(I_n)$$

d'où :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(Z) \det(Y) = \det(ZY) = \det(AD - BD^{-1}CD) = \det(AD - BC)$$

car $CD = DC$.

11. Notons Δ_p le déterminant considéré (qui est de taille $(p+1) \times (p+1)$) et supposons $p \geq 1$. On effectue alors, pour k allant de $p+1$ à 2 les opérations $L_k \leftarrow L_k - L_{k-1}$, ce qui nous donne :

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{0} & \binom{n+p}{1} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{p} \\ 0 & \binom{n}{0} & \dots & \binom{n}{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \binom{n+p-1}{0} & \dots & \binom{n+p-1}{p-1} \end{vmatrix} = \Delta_{p-1}$$

en développant par rapport à la première colonne. Par récurrence, on a donc $\Delta_p = \Delta_0 = 1$.

12. (a) On trouve

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En développant D_{n+2} par rapport à la première colonne

$$D_{n+2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n+1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

En développant le second déterminant par rapport à la première ligne,

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$$

L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $X^2 - 2X + 1 = 0$ qui admet 1 pour racine double. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \geq 1, \quad D_n = \lambda n + \mu.$$

Puisque $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$, on trouve $\lambda = \mu = 1$ et donc $D_n = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

► Applications du déterminant

13. (a) Notons C_1, \dots, C_n les vecteurs colonnes de A et supposons trouvés $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = 0.$$

En posant $m = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) \neq 0$ alors, puisque pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j a_{i,j} = 0$$

on obtient

$$|\lambda_i| \leq \frac{\sum_{j \neq i} |\lambda_j| |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \leq m \frac{\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} < m$$

ce qui est absurde car il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $m = |\lambda_{i_0}|$. Ainsi, la famille (C_1, \dots, C_n) est libre et donc une base par condition de dimension et cardinal. De fait, A est inversible.

(b) Considérons l'application $f : x \mapsto \det(A + xI_n)$.

La fonction f est polynomiale et unitaire : elle est donc continue et de limite $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. De plus, le résultat précédent s'applique à la matrice $A + xI_n$ pour tout $x \geq 0$ et donc $f(x) \neq 0$ sur $[0, +\infty[$. Par continuité, la fonction f ne peut prendre de valeur négative et donc

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) > 0$$

En particulier $\det A = f(0) > 0$.

14. f est linéaire par linéarité de l'intégrale. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$f(X^k) = \frac{1}{k+1} ((X+1)^{k+1} - X^{k+1}) = \frac{1}{k+1} \sum_{\ell=0}^k \binom{k+1}{\ell} X^\ell.$$

Ainsi $\deg f(X^k) = k \leq n$ et $f(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Par linéarité, $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$. f induit bien un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

L'expression de $f(X^k)$ trouvée à la question précédente montre que la matrice de f_n dans la base canonique est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux valent $\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{k} = 1$ pour k variant de 0 à n . Le déterminant de f_n vaut donc 1.

15. (a) On vérifie rapidement que la famille $\mathcal{F} = (\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ est libre ; de fait F est de dimension finie égale au cardinal de cette famille, soit 4.

(b) On remarque que :

$$\text{mat}_{\mathcal{F}}(\Delta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $\det(\Delta) = 1$: Δ est un automorphisme de F .

(c) Soit $f = \alpha \cos + \beta \sin + \gamma \text{ch} + \delta \text{sh} \in F$; alors, si on pose $M = \text{mat}_{\mathcal{F}}(\Delta)$ et $Y = \text{mat}_{\mathcal{F}}(f)$, f est solution de l'équation considérée si et seulement si :

$$(M - I_4)Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de résoudre le système linéaire correspondant, soit :

$$\begin{cases} -2\alpha & = & 0 \\ -2\beta & = & 2 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 7 \end{cases}$$

qui n'admet aucune solution.

16. La famille $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $D_n = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) \neq 0$.

Pour $n = 1$, on a $D_1 = a + b$ et donc la condition recherchée est $a \neq -b$. Pour $n = 2$, on trouve

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)$$

et donc la condition souhaitée est $a \notin \{b, -b\}$. Ensuite, si $n \geq 2$, on a :

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & b \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ b & & & a \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_{2n-1} = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & & \\ & & a & & b \\ & & & a+b & \\ & & b & & a \\ & \ddots & & & \\ b & & & & a \end{vmatrix}.$$

Ainsi, si $n > 2$ est pair, en développant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$D_n = a \begin{vmatrix} D_{n-2} & 0_{n-2,1} \\ 0_{1,n-2} & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0_{1,n-2} & b \\ D_{n-2} & 0_{n-2,1} \end{vmatrix}$$

et donc en développant les deux déterminants *supra* par rapport à la dernière colonne (resp. la première ligne), on trouve :

$$D_n = (a^2 - b^2)D_{n-2} = (a^2 - b^2)^{\frac{n}{2}-1}D_2 = (a^2 - b^2)^{\frac{n}{2}}$$

et donc \mathcal{U} est une base si et seulement si $a \notin \{b, -b\}$.

Pour finir, si $n \geq 3$ est impair, en développant par rapport à la colonne d'indice $\frac{n+1}{2}$, on obtient la relation

$$D_n = (a+b)D_{n-1} = (a+b)(a^2 - b^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

car $n-1$ est pair. In fine, on trouve de nouveau que \mathcal{U} est une base si et seulement si $a \notin \{b, -b\}$.

17. Puisque A et B sont semblables, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $PAP^{-1} = B$ et donc $PA = BP$. On peut poser $P = Q + iR$ avec $(Q, R) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Puisque A et B sont réelles, on obtient $QA = BQ$ et $RA = BR$ par passage aux parties réelle et imaginaire.

Posons ensuite $D(\lambda) = \det(Q + \lambda R)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$; comme le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, D est une fonction polynomiale. Puisque $D(i) \neq 0$, D n'est pas nulle sur \mathbb{C} donc elle ne peut être nulle sur \mathbb{R} par "excès de racines". Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $D(\lambda) \neq 0$. Alors $S = Q + \lambda R$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est inversible et $SA = BS$, ergo $SAS^{-1} = B$: A et B sont semblables sur \mathbb{R} .

18. (a) Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{ker } f$. Puisque $x \in \text{Im } f$, il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = f(y)$. Comme $f^3 + f = 0$, $f^3(y) + f(y) = 0$ i.e. $f^2(x) + x = 0$. Or $x \in \text{Ker } f$ donc $f(x) = 0$ puis $f^2(x) = 0$. Finalement $x = 0$. $\text{ker } f$ et $\text{Im } f$ sont donc en somme directe. D'après le théorème du rang, $\dim \text{ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3$. On en conclut que $\mathbb{R}^3 = \text{ker } f \oplus \text{Im } f$.
- (b) Comme f est non nulle, $\text{Im } f \neq \{0\}$ donc $\text{Im } f$ contient un vecteur non nul u . À l'aide de la première question, on a $f^2(u) = -u$.
- (c) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu f(u) = 0$. En composant par f , on a également $\lambda f(u) + \mu f^2(u) = 0$ i.e. $\lambda f(u) - \mu u = 0$ et donc $(\lambda^2 + \mu^2)u = 0$. Comme $u \neq 0$, on a $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ et donc $\lambda = \mu = 0$. Ainsi $(u, f(u))$ est une famille libre de $\text{Im } f$. On en déduit que $\text{rg } f \geq 2$.
- (d) Comme $\text{rg } f = 3$, f est un endomorphisme surjectif donc bijectif. En composant $f^3 + f = 0$ par f^{-1} , on aboutit à $f^2 + \text{Id} = 0$ i.e. $f^2 = -\text{id}_{\mathbb{R}^3}$. De fait, $\det(f^2) = \det(-\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = -1$. Or $\det(f^2) = \det(f)^2 \geq 0$, ce qui amène à une absurdité. La seule possibilité est donc $\text{rg } f = 2$. Par formule du rang, on a de plus $\dim \text{Ker } f = 1$.
- (e) Puisque $\dim \text{Ker } f = 1$, il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{ker } f = \text{vect}(v)$. De plus, $(u, f(u))$ est une famille libre de $\text{Im } f$ et donc une base de $\text{Im } f$ puisque $\text{rg } f = 2$. Puisque $\text{Im } f$ et $\text{ker } f$ sont supplémentaires, $(v, f(u), u)$ est une base de \mathbb{R}^3 . La matrice de f dans cette base est bien de la forme voulue.

► Approfondissements

19. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ non décroissante. Alors il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) < \sigma(j)$. Soit $\tau = (\sigma(i) \sigma(j))$; si on pose $\sigma' = \tau \circ \sigma$, alors

$$f(\sigma') - f(\sigma) = i\sigma(j) + j\sigma(i) - i\sigma(i) - j\sigma(j) = (j-i)(\sigma(i) - \sigma(j)) < 0.$$

Ainsi le minimum de f est atteint en la seule permutation décroissante de \mathfrak{S}_n , à savoir la permutation qui à $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ associe $n + 1 - k$. Le minimum de f sur \mathfrak{S}_n vaut donc

$$\sum_{k=1}^n k(n+1-k) = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

20. (a) On vérifie que \mathfrak{A}_2 est le groupe trivial et que

$$\mathfrak{A}_3 = \{\text{id}_{\llbracket 1, 3 \rrbracket}, (1\ 2\ 3), (2\ 1\ 3)\}.$$

- (b) Notons $X_n = \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n$; alors il est clair que l'application $f : \sigma \mapsto (1\ 2)\sigma$ est une application bijective de \mathfrak{A}_n dans X_n (elle est involutive). De fait, les ensembles considérés étant finis, on a $|\mathfrak{A}_n| = |X_n|$. Or, comme \mathfrak{S}_n est égal à la réunion disjointe de \mathfrak{A}_n et X_n on a :

$$n! = |\mathfrak{S}_n| = |\mathfrak{A}_n| + |X_n| = 2|\mathfrak{A}_n| \quad \text{d'où} \quad |\mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}.$$

De plus, la signature étant un morphisme de groupes, si $(\eta, \sigma) \in Sk_n \times \mathfrak{A}_n$ on a :

$$\varepsilon(\sigma\eta\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\eta)\varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\eta)$$

et donc $\sigma\eta\sigma^{-1} \in \mathfrak{A}_n$.

- (c) On sait qu'il existe une telle permutation σ dans \mathfrak{S}_n . Si $\varepsilon(\sigma) = 1$, c'est terminé, sinon on compose par $\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ et on obtient une permutation paire adéquate.
- (d) Soit $\rho = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ des cycles de longueur 3. Alors ils sont dans \mathfrak{A}_n car ils peuvent se décomposer en produit de deux transpositions (par exemple, $\rho = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)$). D'après la question précédente, comme $n - 2 \geq 3$ il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \sigma(a_i) = b_i$ et donc $\tau = \sigma\rho\sigma^{-1}$ d'après un exercice précédent.
21. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

- (a) Cela découle directement de la formule du déterminant.
- (b) Par théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$u \det(A) + v \det(B) = 1.$$

Notons \tilde{A} et \tilde{B} les transcomatrices respectives de A et B ; ces matrices sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ car leurs coefficients sont des polynômes en les coefficients de A et B . Alors on a :

$$A(u\tilde{A}) + B(v\tilde{B}) = u \det(A)I_n + v \det(B)I_n = I_n$$

d'où le résultat.

22. Notons Δ_n le déterminant considéré.

— On suppose dans un premier temps les a_i deux à deux distincts. Alors par décomposition en éléments simples, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - X)}{\prod_{i=1}^n (X + a_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X + a_i}.$$

Notons que la partie entière est nulle car le degré de la fraction R est strictement négatif. Plus précisément, comme les pôles de R sont simples, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\lambda_i = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (b_j + a_i)}{\prod_{j \neq i} (a_j - a_i)} \neq 0.$$

On effectue ensuite l'opération $L_n \leftarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k L_k$ et on obtient, en remarquant que $R(b_j) = 0$ si $j \neq n$:

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & R(b_2) & \cdots & R(b_n) \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_n} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & R(b_n) \end{vmatrix}.$$

De fait, en développant par rapport à L_n , on obtient :

$$\Delta_n = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_i - b_n)(a_i - a_n)}{\prod_{i=1}^n (b_n + a_i) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n + b_i)} \Delta_{n-1}$$

et donc, par récurrence :

$$\forall n \geq 1, \quad \Delta_n = \frac{\prod_{j=1}^n \prod_{i < j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}.$$

- Si les a_i ne sont plus supposés deux à deux distincts, deux des lignes du déterminant au moins sont égales, ce qui implique que $\Delta_n = 0$.
- 23. — Supposons n impair ; alors

$$\det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$$

donc $\det(A) = 0$.

- Supposons n pair ; on raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $k \neq \ell$, on notera $P_{k,\ell} = (\delta_{i,\tau(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\tau = (k \ell) \in \mathfrak{S}_n$. La multiplication à gauche (resp. à droite) d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par cette matrice en échange les $k^{\text{ème}}$ et $\ell^{\text{ème}}$ lignes (resp. colonnes). On remarque que $P_{k,\ell}$ est symétrique et inversible car $P_{k,\ell}^2 = I_n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ antisymétrique. Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = a^2 \geq 0$.

Supposons maintenant qu'il existe $p \geq 2$ tel que toute matrice antisymétrique réelle de taille $2(p-1)$ soit de déterminant positif. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ antisymétrique. Si $A = 0$, alors $\det A = 0$. Sinon, il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i < j$ et $a_{ij} \neq 0$. Posons ensuite :

$$B = P_{2,j} P_{1,i} A P_{1,i} P_{2,j}.$$

Comme $P_{1,i}$ et $mP_{2,j}$ sont symétriques, B est antisymétrique ; elle est donc de la forme

$$B = \left(\begin{array}{c|c} J & U \\ \hline -U^T & C \end{array} \right)$$

avec $J = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ -a_{ij} & 0 \end{pmatrix}$ et C antisymétrique. Comme $a_{ij} \neq 0$, J est inversible. Posons ensuite

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & -J^{-1}U \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array} \right),$$

qui est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls donc inversible. Alors, si on pose $D = Q^T B Q$ on a :

$$D = \left(\begin{array}{c|c} J & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right)$$

avec $E = U^T J^{-1} U + C$. Or

$$\det(D) = \det(Q)^2 \det(B) = \det(B)$$

et

$$\det(A) = \det(B) \det(P_{1,i})^2 \det(P_{2,j})^2 = \det(B)$$

donc

$$\det(A) = \det(D) = \det(J) \det(E) = a_{ij}^2 \det(E)$$

Or E est antisymétrique car J et C le sont. Par hypothèse de récurrence, $\det(E) \geq 0$
donc $\det(A) \geq 0$.