Déterminant

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier fixé dans $\mathbb{N}^*$.

▶ Groupe symétrique

1. Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles de supports disjoints, puis en produit de transpositions :
   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; (d) $(2\,6)(4\,2\,1\,5)(3\,2)(3\,1\,5)$;
   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$; (e) $(1\,3)(3\,2\,1\,4)(3\,1\,4)(2\,1\,4)$.
   (c) $(1\,3\,5\,2)(2\,4\,1\,7)(5\,8)$;
2. Déterminer la signature des permutations suivantes :
   (a) $(1\,2)(3\,4)(5\,6)$; (c) $(1\,5\,3\,2\,4)^{-1}$; (e) $(1\,3)(2\,6\,7)^{-1}(4\,7\,3\,1\,2)$;
   (b) $(1\,5\,3\,2\,4)$; (d) $(1\,3\,2\,4)^{37}$ (f) $((1\,3)(2\,6\,7)(4\,7\,3\,1\,2))^{64}$.
3. Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions de la forme $(1\ i)$ avec $i \in [\![2, n]\!]$.
4. Soit $(a_1\ \dots\ a_k) \in \mathfrak{S}_n$ un cycle ; exprimer simplement $\sigma(a_1\ \dots\ a_k)\sigma^{-1}$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

▶ Calculs de déterminants

5. Calculer les déterminants suivants, pour $a, b, c \in \mathbb{K}$. :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -17 & 21 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}.$$

6. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Exprimer le déterminant suivant sous la forme d'un produit de trois sinus :

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin(x) & \cos(x) \\ 1 & \sin(y) & \cos(y) \\ 1 & \sin(z) & \cos(z) \end{vmatrix}.$$

7. *Déterminant tridiagonal.* On considère le déterminant suivant pour $a, b, c \in \mathbb{K}$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ \vdots & & \ddots & c & a & b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

   Établir une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} pour $n \geq 2$. En déduire une méthode permettant le calcul explicite de D_n. Mener les calculs à terme dans le cas où $a^2 = 4bc$.
8. Pour $n \geq 3$, calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Pour $a, b, c \in \mathbb{K}$, on pose
$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & c & \dots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} .$$
Démontrer que la fonction $f : x \mapsto D(a+x, b+x, c+x)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à 1. En déduire la valeur de $D(a,b,c)$.
10. Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $D \in GL_n(\mathbb{K})$.
   (a) Déterminer $X, Y, Z, T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ T & I_n \end{pmatrix} .$$
   (b) En déduire que si $CD = DC$ alors :
$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC) .$$
11. Caculer le déterminant de la matrice $\left(\left(\binom{n+i}{j}\right)\right)_{0 \le i,j \le p}$ pour $0 \le p \le n$.
12. On note $A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont le coefficient en position (i,j) est
$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
et on pose $D_n = \det(A_n)$.
   (a) Écrire les matrices A_3, A_4 et A_5.
   (b) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(D_n)_n$. En déduire D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

► Applications du déterminant

13. *Matrices à diagonale dominante.* Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| .$$
   (a) Montrer que A est inversible.
   (b) On suppose de plus que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,i} > 0 .$$
   Montrer que $\det A > 0$.
14. Soit f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\tilde{\mathrm{P}}$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\mathrm{P}}(x) = \int_x^{x+1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t$$
Soit $n \in \mathbb{N}$; montrer que f induit un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son déterminant.
15. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et on considère l'application $\Delta : f \mapsto f''$ ainsi que l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$.
   (a) Justifier que F est de dimension finie, puis déterminer $\dim(F)$.
   (b) Calculer $\det(\Delta)$. Que peut–on en déduire ?
   (c) Résoudre sur F l'équation différentielle $y'' - y = 2\cos + 7\mathrm{sh}$.
16. Soit E un $\mathbb{K}$–e.v de dimension finie et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. À quelle condition sur les scalaires $a, b \in \mathbb{K}$ la famille définie par
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad u_i = ae_i + be_{n+1-i}$$
est–elle une base de E ?
17. Démontrer que deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

18. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.
    (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

    On suppose désormais f non nul.

    (b) Justifier l'existence d'un vecteur non nul u de $\operatorname{Im} f$ et montrer que $f^2(u) = -u$.
    (c) Démontrer que la famille $(u, f(u))$ est libre. Que peut-on en déduire sur $\operatorname{rg} f$?
    (d) On suppose que $\operatorname{rg} f = 3$; établir que $f^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ et que cela est absurde. Que peut-on en conclure sur les dimensions de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$?
    (e) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

► Approfondissements

19. Déterminer le minimum de l'application

$$f : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\sigma \mapsto \sum_{k=1}^{n} k\sigma(k)\,.$$

20. *Quelques propriétés du groupe alterné.* On pose, pour $n \geq 2$:

$$\mathfrak{A}_n = \ker(\varepsilon) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

    (a) Déterminer les groupes $\mathfrak{A}_2$ et $\mathfrak{A}_3$.
    (b) Démontrer que $\operatorname{Card}(\mathfrak{A}_n) = \dfrac{n!}{2}$ et que pour tout $(\eta, \sigma) \in \mathfrak{A}_n \times \mathfrak{S}_n$, $\sigma\eta\sigma^{-1} \in \mathfrak{A}_n$.
    (c) Supposons $n \geq 3$. Soient $a_1, \dots, a_{n-2}$ et $b_1, \dots, b_{n-2}$ deux familles d'entiers deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$. Démontrer qu'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n-2]\!], \quad \sigma(a_i) = b_i\,.$$

    (d) Supposons $n \geq 5$. Démontrer si ρ et τ sont deux cycles de longueur 3 alors ils sont dans $\mathfrak{A}_n$ et il existe $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ tel que $\tau = \sigma\rho\sigma^{-1}$.

21. *Théorème de Bézout matriciel.* On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ dont tous les coefficients sont entiers et on fixe $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.
    (a) Vérifier que $\det(A)$, $\det(B) \in \mathbb{Z}$.
    (b) On suppose que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$; démontrer qu'il existe $U, V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que :

$$AU + BV = I_n\,.$$

22. *Déterminant de Cauchy.* Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $a_i + b_i \neq 0$. Démontrer que :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{i<j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{n} (a_i + b_j)}\,.$$

    Indication : on pourra s'intéresser à la décompositon en éléments simples de la fraction rationnelle

$$R = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1} (b_i - X)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (X + a_i)}$$

    dans le cas où les a_i sont deux à deux distincts.

23. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$; démontrer que $\det(A) \geq 0$.