Séries numériques

▶ Études de convergence

1. (a) La série $\sum u_n$ est à termes positifs et si $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{n}$ donc par comparaison de STP $\sum u_n$ diverge.
   (b) $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.
   (c) Pour tout $n \geq 1$, $|u_n| \geq \frac{1}{3}$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   (d) $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente.
   (e) $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente si vous avez l'impression que je me répète, vous avez raison).
   (f) $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente (heureusement que le copier–coller existe).
   (g) $u_n \sim \dfrac{1}{n^8}$ et donc par équivalents de STP, $\sum u_n$ converge.
   (h) Pour $N \geq 2$ on a, par comparaison série–intégrale (la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante sur $[2, \infty[$) :
   $$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln(n)} \geq \int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \ln(\ln(N+1)) - \ln\ln(2) \to \infty$$
   et donc $\sum u_n$ diverge par minoration de ses sommes partielles.
   (i) On a $u_n \sim 2n$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   (j) Soit $n \geq 1$; alors on a :
   $$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n^2 \ln\left(\frac{n^5 - 5n + 1}{n^2 - 4n + 2}\right)\right) \\ &= \exp\left(3n^2\left(\ln(n) + \ln\left(\frac{1 - \frac{5}{n^4} + \frac{1}{n^5}}{1 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}\right)\right)\right) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \end{aligned}$$
   donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   (k) On a pour $n \geq 1$ $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\sum u_n$ converge absolument par comparaison de STP.
   (l) Pour $n \geq 1$, $u_n \geq 0$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$ donc $\sum u_n$ diverge par équivalent de STP.
2. Pour $N \geq 1$, on a :
   $$0 \leq \sum_{n=1}^{N} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
   et donc par majoration de la suite des sommes partielles d'une STP, $\sum u_n$ converge.
3. Comme $\sum u_n$ converge, on a $u_n \to 0$; de fait, à partir d'un certain rang N on a $u_n \in [0, 1]$ et donc :
   $$\forall n \geq N, \quad 0 \leq u_n^2 \leq u_n\,.$$
   La suite $\sum u_n^2$ est donc convergente par comparaison de STP.
4. Ces deux séries convergent par application directe du CSSA. Concernant la convergence absolue, on remarque que, pour $n \geq 1$:
   $$0 \leq \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leq \arctan\left(\frac{1}{n^n}\right) \sim \frac{1}{n^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   et donc par équivalent de STP, la série du (a) ne converge pas absolument mais celle du (b) oui.

5. Dans tous les cas cette série est à termes positifs. Si $\alpha > 0$, $e^{-n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série étudiée converge. Sinon, on vérifie rapidement qu'elle diverge grossièrement.

6. — *Cas* $\alpha > 1$. Si $\beta \geq 0$, alors $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geq 3$. Or la série de Riemann $\sum_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$. On en déduit que $\sum_{(n\geq 2)} u_n$ converge. Si $\beta < 0$, donnons-nous $\gamma \in]1, \alpha[$. Or $(\ln n)^{-\beta} = o\left(n^{\alpha-\gamma}\right)$ par croissances comparées. Ceci signifie que $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Or la série de Riemann $\sum_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^\gamma}$ est à termes positifs et converge puisque $\gamma > 1$ donc $\sum_{(n\geq 2)} u_n$ converge.

   — *Cas* $\alpha < 1$. Si $\beta \leq 0$, alors $0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq u_n$ pour $n \geq 3$. Or $\sum_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge donc $\sum_{(n\geq 2)} u_n$ diverge. Si $\beta > 0$, on fixe $\gamma \in]\alpha, 1[$ de sorte que $(\ln n)^\beta = o\left(n^{\gamma-\alpha}\right)$ par croissances comparées. Ceci signifie que $\frac{1}{n^\gamma} = o\left(u_n\right)$. Or la série $\sum_{(n\geq 2)} u_n$ est à termes positifs et la série de Riemann $\sum_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^\gamma}$ diverge puisque $\gamma < 1$. On en déduit que $\sum_{(n\geq 2)} u_n$ diverge.

   — *Cas* $\alpha = 1$. Si $\beta \leq 0$, on a alors $0 \leq \frac{1}{n} \leq u_n$ pour $n \geq 3$. Or la série harmonique diverge donc $\sum_{(n\geq 2)} u_n$ diverge.

   Pour $\beta > 0$, on pose $f x :\mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ sur $]1, \infty[$. f est décroissante sur $]1, +\infty[$ donc

$$\int_2^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} u_k \leq \frac{1}{(\ln 2)^\beta} + \int_2^n f(x)\mathrm{d}x\,.$$

   Si $\beta \neq 1$, alors $x \mapsto \frac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}$ est une primitive de f et

$$\frac{(\ln(n+1))^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta} \leq \sum_{k=2}^{n} u_k \leq \frac{1}{(\ln 2)^\beta} + \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta}\,.$$

   Par minoration des STP, $\sum u_n$ diverge si $\beta < 1$. Par contre, si $\beta > 1$, la suite des sommes partielles de la STP $\sum u_n$ est majorée par une suite convergente donc elle converge en vertu du théorème de la limite monotone.
   Si $\beta = 1$, alors $x \mapsto \ln(\ln x)$ est une primitive de f de sorte que

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq \sum_{k=2}^{n} u_k\,.$$

   On conclut à la divergence de $\sum u_n$ par minoration de la suite des sommes partielles.

7. C'est un exercice classique de démontrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

   et donc

$$a^{H_n} = \mathrm{e}^{\ln a \ln n + \gamma \ln a + o(1)} \sim \frac{\mathrm{e}^{\gamma \ln a}}{n^{-\ln a}}$$

   Par équivalence de séries à termes positifs

$$\sum_{(n\geq 1)} a^{H_n} \text{ converge } \iff -\ln a > 1 \iff a < \mathrm{e}^{-1}\,.$$

▶ Calculs de somme

8. (a) Par lien suite–série, la série $\sum u_n$ converge car car la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = -1\,.$$

(b) On remarque que :

$$\forall n \geq 1\,, \quad u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

et donc par lien suite–série, la série $\sum u_n$ diverge car la suite $(\ln(n))_n$ diverge.

(c) Par décomposition en éléments simples :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

donc par lien suite–série la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1\,.$$

9. Posons $f : x \mapsto \ln(1+x)$: cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,\infty[$. Fixons $x \in]-1,1]$ et $n \geq 1$ et appliquons l'inégalité de Taylor–Lagrange à f entre 0 et x : il existe donc un réel $R_n(x)$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_n(x) \quad \text{ et } \quad |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[0,x]} |f^{(n+1)}|\,.$$

On a donc, en combinant tout ceci :

$$0 \leq \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} n!$$

car $|f^{(n+1)}|$ est majorée par $n!$ sur son ensemble de définition. Or

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} n! = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et donc par théorème d'existence par encadrement :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(1+x)\,.$$

Ainsi, on a bien la convergence de la suite des sommes partielles de la série considérée (rappelons que $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$ pour tout $n \geq 1$) et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)\,.$$

10. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{e^{in}}{2^n}$; $\sum u_n$ est alors une série géométrique de raison de module strictement inférieur à 1 : $\sum u_n$ converge absolument, donc converge. De plus on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{2}{2-e^i} = \frac{2(2-\cos(1))}{(2-\cos(1))^2 + \sin^2(1)} + \frac{(2\sin(1))i}{(2-\cos(1))^2 + \sin^2(1)}$$

et donc, par convergence des parties réelles et imaginaires d'une série convergente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{2^n} = \frac{2(2-\cos(1))}{(2-\cos(1))^2 + \sin^2(1)} \quad \text{ et } \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n} = \frac{2\sin(1)}{(2-\cos(1))^2 + \sin^2(1)}\,.$$

11. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; alors par formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) &= \frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right)\right) - \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)}{1 + \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{k(k+1)}} \\
&= \frac{1}{k^2+k+1}\,.
\end{aligned}$$

(b) Comme la fonction arctan est croissante on a, pour $n \geq 1$, $0 \leq \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{\pi}{4}$; de fait :

$$-\frac{\pi}{4} \leq \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{\pi}{4}$$

et donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
u_n &= \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \\
&= \arctan\left(\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\right) \\
&= \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum u_n$ converge car la suite $\left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)_n$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{\pi}{4}\,.$$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\binom{n+p}{n}} &= \frac{p!}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)} \\
&= \frac{p!}{p-1}\,\frac{(n+p)-(n+1)}{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)} \\
&= \frac{p!}{p-1}\left(\frac{1}{(n+p-1)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)\dots(n+2)}\right)\,.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on a par télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\binom{n+p}{n}} &= \frac{p!}{p-1}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{(n+p-1)\dots(n+1)} - \frac{1}{(n+p)\dots(n+2)}\right) \\
&= \frac{p!}{p-1}\left(\frac{1}{(p-1)\dots 1} - \frac{1}{(\mathrm{N}+p)\dots(\mathrm{N}+2)}\right) \\
&\underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{p!}{(p-1)(p-1)!} = \frac{p}{p-1}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+p}{n}} = \frac{p}{p-1}\,.$$

13. Posons $v_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$

$$v_n = \frac{\sqrt{n!}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1+\sqrt{k})} \,.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a alors :

$$\begin{aligned} v_{n-1} - v_n &= \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (1+\sqrt{k})} - \frac{\sqrt{n!}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1+\sqrt{k})} \\ &= \frac{(1+\sqrt{n})\sqrt{(n-1)!} - \sqrt{n!}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1+\sqrt{k})} \\ &= \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1+\sqrt{k})} \,. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}$$

et donc

$$-\ln(v_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \,.$$

Comme $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$ et que $\sum \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ diverge on a, par équivalent de STP que la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ diverge. Par positivité, on a donc $-\ln(v_n) \to +\infty$ et, par composition des limites $v_n \to 0$.
In fine, par lien suite–série, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1+\sqrt{k})} = 1 \,.$$

14. Par application directe du CSSA, la série étudiée est convergente.
Notons ensuite $(\Sigma_n)_{n\geq 2}$ la suite des sommes partielles de cette série et posons, pour tout entier naturel $n \geq 2$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \ln(k)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \Sigma_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k [\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)] \\ &= -4 \ \mathrm{S}_{2n} + \ln(2n(2n+1)) \\ &= -4 \ln\left(\frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}\right) + \ln(2n(2n+1)) \\ &= \ln\left(\frac{2n(2n+1)(2n)!^4}{2^{8n} n!^8}\right) \,. \end{aligned}$$

De plus, par formule de Stirling :

$$\frac{2n(2n+1)(2n)!^4}{2^{8n} n!^8} \sim \frac{4n^2 (2\pi \times 2n)^2 \left(\frac{2n}{e}\right)^{8n}}{2^{8n} (2\pi \times n)^4 \left(\frac{n}{e}\right)^{8n}} \sim \frac{4}{\pi^2}$$

et donc, par continuité du logarithme :

$$\Sigma_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right).$$

Puisque la série converge, on a donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right).$$

▶ Considérations diverses

15. (a) La série $\sum\limits_{(n\geq 1)} u_n$ par lien suite–série (et sa somme vaut 1). Si on suppose $\sum\limits_{(n\geq 1)} v_n$ convergente alors la série harmonique serait convergente par combinaison linéaire, ce qui est absurde.

(b) Remarquons que, pour $n \geq 1$:

$$\frac{1}{nu_n} = (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n(n+1)}}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \sim (-1)^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

donc $\dfrac{1}{n} = o(u_n)$. Ceci entraîne que $v_n = u_n + o(u_n)$ donc $v_n \sim u_n$. Notons que l'on ne contredit pas le théorème d'équivalent des STP car nos séries ne sont **pas** à termes positifs !

16. Posons, pour $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \ \ (\text{si } \alpha > 1).$$

(a) Supposons $0 < \alpha \leq 1$. Par comparaison série–intégrale, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ étant continue et décroissante sur $[1,\infty[$, on a, pour tout $n \geq 1$:

$$\int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

et donc, si $\alpha \neq 1$:

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \leq \mathrm{S}_n \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

On en déduit que $S_n \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
Si $\alpha = 1$, on a à la place :

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$

et donc $S_n \sim \ln n$.

(b) Supposons $\alpha > 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ étant continue et décroissante sur $[1,\infty[$ on a, pour des entiers n et N tels que $1 \leq n < N$:

$$\int_{n+1}^{N+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

et donc

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ N+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient ensuite :

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \mathrm{R}_n \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

et donc, par encadrement :

$$R_n \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}\,.$$

17. (a) On commence par vérifier rapidement par récurrence que, pour tout $n \geq 0$:

$$|x_{n+1}-x_n| = |f(x_n)-f(x_{n-1}| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq \ldots \leq k^n|x_1-x_0|\,.$$

Ainsi, $x_{n+1}-x_n = \mathcal{O}(k^n)$ avec $k \in [0,1[$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{n+1}-x_n$ converge absolument par comparaison à une série géométrique. Par lien suite–série, la suite $(x_n)_n$ converge.

(b) Notons ℓ la limite de $(x_n)_n$; comme f est continue (car lipschitzienne), $\ell = f(\ell)$ donc ℓ est un point fixe de f.

Soit ensuite ℓ' un point fixe de f. Alors

$$|\ell-\ell'| = |f(\ell)-f(\ell')| \leq k\,|\,\ell-\ell'|$$

et donc

$$(1-k)\,|\ell-\ell'| \leq 0\,.$$

Comme $1-k>0, |\ell-\ell'|=0$ *i.e* $\ell=\ell'$: f admet donc un unique point fixe.

▶ Approfondissements

18. (a) Soit $q \in]\ell,1[$. Par définition de la limite, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq q$ pour $n \geq N$. Ainsi $0 \leq u_n \leq q^n$ pour $n \geq \mathrm{N}$. Puisque la série $\sum q^n$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$ par comparaison de STP.

(b) Soit $q \in]1,\ell[$. Par définition de la limite, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $0 \leq q \leq \sqrt[n]{u_n}$ pour $n \geq N$. Ainsi $0 \leq q^n \leq u_n$ pour $n \geq N$. Puisque la série $\sum q^n$ diverge, il en est de même de la série $\sum u_n$ par comparaison de STP.

(c) Posons $u_n = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Alors $\sqrt[n]{u_n} \to 1$ et $\sum u_n$ diverge.

Par ailleurs, si on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. Alors $\sqrt[n]{u_n} = \exp\left(-\frac{2\ln n}{n}\right) \to 1$ et $\sum u_n$ converge.

En conclusion, on ne peut pas conclure !-

19. (a) Soit $N\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geq N$. Par télescopage, on obtient

$$\frac{u_n}{u_N} \leq \frac{v_n}{v_N}$$

i.e $u_n \leq \dfrac{u_N}{v_N}v_n$ pour tout $n \geq N$. On a donc bien $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

(b) (i) Soit β tel que $1<\beta<\alpha$ et posons $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}\\ &= 1-\frac{\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\,.\end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\alpha-\beta}{n}$. Puisque $\alpha-\beta>0$, on a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. D'après la première question, $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. La série $\sum v_n$ converge car $\beta>1$ et, comme elle est à termes positifs, sa convergence entraîne celle de $\sum u_n$.

(ii) On se donne β tel que $\alpha < \beta < 1$ et on pose à nouveau $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On montre comme précédemment que $v_n = \mathcal{O}(u_n)$. La divergence de $\sum v_n$ entraîne la divergence de $\sum u_n$ par comparaison de STP.

(iii) Si on pose $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum u_n$ diverge.

Si on pose $u_n = \dfrac{1}{n \ln^2 n}$ pour $n \geq 2$, on a à nouveau $u_n = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Mais la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln^2 x}$ étant décroissante, on montre rapidement la convergence de $\sum u_n$ par comparaison suite–série.

(c) On a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2n+2}{2n+3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}} \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Autrement dit, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ avec les notations précédentes : la série $\sum u_n$ diverge.

20. (a) On remarque

$$p^n(p-1)u_{p^{n+1}} \leq \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k \leq p^n(p-1)u_{p^n}$$

et donc

$$\frac{p-1}{p}\sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell \leq \sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \leq (p-1)\sum_{\ell=0}^{n} v_\ell\,.$$

Si $\sum u_n$ converge alors la première inégalité donne

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell \leq \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

ce qui assure la convergence de la série $\sum v_n$ car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.
Réciproquement si $\sum v_n$ converge alors la deuxième inégalité de l'encadrement précédent donne

$$\sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \leq (p-1)\sum_{\ell=0}^{+\infty} v_\ell$$

et puisque les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont croissantes et que ce qui précède permet de les majorer, on peut conclure à la convergence de la série $\sum u_n$.

(b) Prenons $p = 2$ et posons, pour $n \geq 2$:

$$u_n = \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

La suite $(u_n)_n$ est décroissante, positive et

$$\forall n \geq 2,\ v_n = 2^n u_{2^n} = \frac{1}{n \ln 2 \ln(n \ln 2)} \sim \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{n \ln n}\,.$$

et donc $\sum u_n$ diverge par la question (a) et l'exercice sur les séries de Bertand.

21. Commençons par remarquer que l'on a :

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{\omega \in \mathscr{U}_p}\omega^n}{n!}$$

puisque les séries intervenant dans cette égalité convergent. Soit $n \in \mathbb{N}$; alors l'endomorphisme de groupes

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{U}_p &\to \mathbb{U}_p \\ \omega &\mapsto \omega^n\end{aligned}$$

est bijectif si et seulement si n est premier avec p *i.e* si et seulement si p ne divise pas n (puisque p est premier). De plus, on sait que la somme des racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle. Donc pour n non multiple de p, $\sum\limits_{\omega\in\mathbb{U}_p} \omega^n = 0$ et pour n multiple de p, $\sum\limits_{\omega\in\mathbb{U}_p} \omega^n = p$. *In fine*,

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} = p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn)!}\,.$$

Or $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\omega^n}{n!} = e^{\omega}$, d'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(pn)!} = \frac{1}{p} \sum_{\omega\in\mathbb{U}_p} e^{\omega}\,.$$