Séries numériques

## ▶ Études de convergence

1. Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{(n\geq 1)} u_n$ de termes généraux suivants :

   (a) $u_n = \dfrac{2+\sin(n)}{n}$ ; (e) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{7^n}$ ; (i) $u_n = n\left(1+\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ ;

   (b) $u_n = \dfrac{2n}{n+2^n}$ ; (f) $u_n = n^5 e^{-n}$ ; (j) $u_n = \left(\dfrac{n^5-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$ ;

   (c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2+\cos(n)}$ (g) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^8}\right)$ ; (k) $u_n = \dfrac{i\sin(n)}{n^2}$ ;

   (d) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n2^n}$ (h) $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ $(n \geq 2)$ ; ($\ell$) $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{(n\geq 1)} u_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré ;} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente ; démontrer que $\sum u_n^2$ converge.

4. Les séries suivantes sont–elles convergentes ? Absolument convergentes ?

   (a) $\sum\limits_{(n\geq 1)} (-1)^n \arctan\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ; (b) $\sum\limits_{(n\geq 1)} (-1)^n \arctan\left(\dfrac{1}{n^n}\right)$.

5. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{(n\geq 1)} e^{-n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. *Séries de Bertrand.* Étudier la convergence la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$$

   pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$.

7. Soit $a > 0$ ; étudier la convergence de la série $\sum\limits_{(n\geq 1)} a^{H_n}$, où $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$.

## ▶ Calculs de somme

8. Dans les cas suivants, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{(n\geq 1)} u_n$ et, si elle est convergente, calculer sa somme :

   (a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ; (b) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ ; (c) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

9. Démontrer l'existence de, et calculer, la somme suivante, pour $x \in ]-1,1]$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n .$$

10. Démontrer que les séries $\sum \dfrac{\cos(n)}{2^n}$ et $\sum \dfrac{\sin(n)}{2^n}$ sont convergentes et calculer leurs sommes.

11. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$.

    (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la quantité

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) .$$

    (b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

12. Démontrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum \binom{n+p}{n}^{-1}$, pour $p \geq 2$.
13. Démontrer l'existence et calculer la quantité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\prod_{k=1}^{n}(1+\sqrt{k})}.$$

14. Établir la convergence et déterminer la somme de la série $\sum_{(n\geq 2)} (-1)^n \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

   *Indication :* on pourra déterminer un équivalent de ses sommes partielles d'ordre pair.

## ▶ Considérations diverses

15. On considère les séries de termes généraux $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.
   (a) Démontrer que $\sum_{(n\geq 1)} u_n$ converge et $\sum_{(n\geq 1)} v_n$ diverge.
   (b) Montrer que $u_n \sim v_n$. Conclusion ?
16. (a) Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $0 < \alpha \leq 1$.
   (b) Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum_{(n\geq 1)} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.
17. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $k$-lipschitzienne avec $k \in ]0,1[$ et $(x_n)_n$ une suite telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) En considérant la série $\sum x_{n+1} - x_n$, démontrer que la suite $(x_n)_n$ converge.
   (b) En déduire que $f$ admet un unique point fixe.

## ▶ Approfondissements

18. *Règle de Cauchy.* Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs telle que $\sqrt[n]{u_n} \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$.
   (a) Montrer que si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
   (b) Établir que si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
   (c) Que dire du cas $\ell = 1$ ?
19. *Critère de Raabe-Duhamel.*
   (a) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. Montrer que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.
   (b) Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   Démontrer que :
   (i) si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge ;
   (ii) si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge ;
   (iii) si $\alpha = 1$, on ne peut conclure.
   (c) *Application.* Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}.$$

20. *Critère de condensation de Cauchy.*
   (a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, positive et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. On pose, pour $n \geq 0$, $v_n = p^n u_{p^n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
   (b) *Application.* Étudier la convergence de la série $\sum_{(n\geq 2)} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$.
21. Soit $p$ un nombre premier ; déterminer (si elle existe) la somme de la série $\sum \frac{1}{(pn)!}$.

# ▶ Exercices CCINP

$\boxed{5}$ 1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas $\alpha \leq 0$.** En utilisant une minoration très simple de $u_n$, démontrer que la série diverge.

(b) **Cas $\alpha > 0$.** Étudier la nature de la série. *Indication :* on pourra utiliser la fonction $f$ définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln\left(n^2+n\right)\right)^2}$.

$\boxed{6}$ Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs et $\ell$ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge. *Indication :* écrire, judicieusement, la définition de $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour $n$ assez grand, $u_n$ par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$ ?

$\boxed{7}$ 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

(a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n$ et $v_n$ sont de même signe à partir d'un certain rang

(b) Dans cette question, on suppose que $(v_n)$ est positive. Prouver que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i}) \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \ln(n)}{(\sqrt{n+3}-1)}$.

$\boxed{8}$ 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente. *Indication :* on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.