Algèbre linéaire matricielle

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier fixé dans $\mathbb{N}^*$.

▶ Matrices dans une base

1. Il s'agit de calculs rapides qui livrent les matrices suivantes :

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \text{(d)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\mathscr{B}_1$ est une famille composée de deux vecteurs non colinéaires et donc libre ; par égalité entre cardinal et dimension on obtient que c'est une base de $\mathbb{R}^2$. Si on suppose trouvés $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\lambda \cdot (1,0,0) + \mu \cdot (1,0,1) + \nu \cdot (0,1,1) = (0,0,0)$$
on obtient le système suivant :
$$\begin{cases} \lambda + \mu & = & 0 \\ \nu & = & 0 \\ \mu + \nu & = & 0 \end{cases}$$
et donc $\lambda = \mu = \nu = 0$. La famille $\mathscr{B}_2$ étant libre de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, il s'agit bien d'une base de cet espace vectoriel. On vérifie ensuite rapidement que f est bien linéaire et que, si on note $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$ et $\mathscr{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$ on a :
$$f(e_1) = (2,0,1) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = (1,-1,1) = -u_1 + 2u_2 - u_3\,.$$
In fine, on a :
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. $\mathscr{B}$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés : elle est donc libre. De plus $|\mathscr{B}| = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ donc cette famille est bien une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Par linéarité de la dérivation, f est linéaire et, si on note $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$, on a :
$$\begin{cases} f(P_1) & = & -1 & = -P_1 \\ f(P_2) & = & -X & = & P_1 - P_2 \\ f(P_3) & = & -2X^2 + 4X & = & -4P_1 + 4P_2 - P_3 \\ f(P_4) & = & -X^3 + 3X^2 - X + 1 & = & P_1 + \frac{3}{2}P_3 - P_4 \end{cases}$$
d'où :
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. On commence par remarquer que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a :
$$f(x,y,z) = (2x + y - z, y, x + y)\,.$$
   (a) La famille $\mathscr{B} = ((1,0,1), (-1,1,0), (1,1,1))$ est une base de $\mathbb{K}^3$ car elle est libre (très rapide) et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{K}^3)$. De plus, si on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ on a :
$$\begin{cases} f(e_1) & = & (1,0,1) & = & e_1 \\ f(e_2) & = & (-1,1,0) & = & e_2 \\ f(e_3) & = & (2,1,2) & = & e_1 + e_3 \end{cases}$$
   d'où :
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Notons M la matrice dans la base canonique de f, $N = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de la base $\mathscr{B}$ dans la base canonique. On a alors, par changement de base

$$M = PNP^{-1}$$

et donc par récurrence, si $n \geq 0$:

$$M^n = PN^nP^{-1}\,.$$

Il est aisé de calculer les puissances de N puisque cette matrice est de la forme $I_3 + A$ avec $A^2 = 0$; cela donne, par binôme de Newton sur deux matrices commutant :

$$\forall n \geq 0, \quad N^n = (A + I_3)^n = I_3 = nA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Par méthode de Gauss–Jordan, on trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

ce qui permet de conclure que :

$$\forall n \geq 0, \quad M^n = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}\,.$$

5. (a) Les ensembles des solutions des équations $AX = 0, AX = X$ et $AX = 2\mathrm{X}$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont respectivement

$$\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

En choisissant

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3 \quad \varepsilon_2 = e_2 - e_3 \quad \varepsilon_3 = e_1 + e_3$$

on a alors

$$f(\varepsilon_1) = 0_{\mathrm{E}} \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \quad f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$$

Comme la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est clairement une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \mathscr{C}$ est également une base de E. Dans cette base, la matrice de f est D.

(b) Il suffit de prendre pour P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{C}$, autrement dit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

On obtient par méthode de Gauss–Jordan l'expression :

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^n \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^{n+1} - 1 & -2^n & 1 - 2^n \end{pmatrix}\,.$$

(d) Il suffit de remarquer qu'en posant $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 2^{n+1}$, $y_n = 1$ et $z_n = 2^{n+1} - 1$.

▶ Rang, trace

6. La matrice M est inversible (vérifier par Gauss–Jordan) donc de rang 3. Les matrices N et P ayant exactement deux lignes ou deux colonnes non colinéaires, elles sont de rang 2.
   La matrice Q est inversible si $m \notin \left\{4, \frac{9}{2}\right)$. Dans le cas contraire, on vérifie qu'elle est de rang 3 par méthode du pivot.
7. On vérifie rapidement que M et N sont de rang 2 et donc équivalentes.
8. Pour $n = 3$, la matrice A a la tête suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} ,$$

   ce qui nous donne l'idée de poser les opérations élémentaires suivantes : pour j allant de n à 2 (dans cet ordre), on remplace C_j par $C_j - C_{j-1}$. On obtient alors la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ n & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} ,$$

   qui est clairement de rang 2 (réitérer les opérations élémentaires précédentes en cas de doute). On a donc $\mathrm{rg}(A) = 2$.
9. Remarquons d'abord que si X est une solution, alors $\mathrm{Tr}(X)+\mathrm{tr}(X)\,\mathrm{Tr}(A) = 0$ i.e. $\mathrm{Tr}(X)(\mathrm{tr}(A)+1) = 0$ par linéarité de la trace.
   - *Cas* $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$. Si X est solution, on a $\mathrm{Tr}(X) = 0$ d'après ce qui précède. Mais alors $X = 0$. On vérifie que la matrice nulle est bien solution de l'équation.
   - *Cas* $\mathrm{Tr}(A) = -1$. Si X est solution, alors X est de la forme $X = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Réciproquement si $X = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$X + \mathrm{Tr}(X)A = \lambda A + \lambda\,\mathrm{tr}(A)A = 0$$

     donc X est bien solution.

   En conclusion, si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, la seule solution est la matrice nulle ; sinon l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(A)$.
10. (a) Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$. Alors il est possible de former le produit $E_{i,j} \times E_{k,\ell} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et cette matrice admet pour coefficient en position $(a, b) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\sum_{c=1}^{n} \delta_{i,a}\delta_{j,c}\delta_{c,k}\delta_{\ell,b} = \delta_{i,a}\delta_{\ell,b} \sum_{c=1}^{n} \delta_{j,c}\delta_{c,k} \,.$$

   La somme de droite *supra* est non nulle à la seule condition que $j = k$, et égale à 1 dans ce cas, entraînant que :

$$\sum_{c=1}^{n} \delta_{i,a}\delta_{j,c}\delta_{c,k}\delta_{\ell,b} = \delta_{i,a}\delta_{\ell,b}\delta_{j,k}$$

   le produit des deux symboles de Kronecker de gauche étant reconnaissable (si, si) comme le coefficient en position (a, b) de la matrice $E_{i,\ell}$. On en déduit donc que :

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell} \,.$$

(b) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ telle que $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f(AB) = f(BA)$. Alors, si $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$ on a en particulier $f(E_{i,j}E_{k,\ell}) = f(E_{k,\ell}E_{i,j})$ et donc d'après ce qui précède :

$$\delta_{j,k} f(E_{i,\ell}) = \delta_{\ell,i} f(E_{k,j})\,.$$

Ceci entraîne que si $i \neq j$, $f(E_{i,j}) = 0$ et que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ on a $f(E_{i,i}) = f(E_{j,j})$: notons λ cette valeur de façon à avoir *in fine*

$$f(E_{i,j}) = \lambda \delta_{i,j}\,.$$

Alors, si $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{aligned} f(M) &= f\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} f(E_{i,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\lambda\delta_{i,j} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(M) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

11. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à A : cette application est aussi de rang 1 et donc par formule du rang son noyau est de dimension $n-1$. Si on fixe $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\ker(f)$, que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E on a :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad f(e_i) = 0$$

et comme $f(e_n) \in \mathbb{K}^n$ il existe une unique famille $b_1, \ldots, b_n$ de scalaires telle que :

$$f(e_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\,.$$

De fait, on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & \ldots & 0 & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

et comme A et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ sont deux matrices du même endomorphisme dans deux bases différentes (identiques au départ et à l'arrivée), elles sont semblables.
Similairement, si on se donne $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v)$ et que l'on complète la famille libre (v) en une base $\mathscr{B}' = (v, u_2, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{K}^n$ on a, pour $f(v), f(u_2), \ldots, f(u_n) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v)$ et donc il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$f(v) = a_1 v \quad \text{ et } \quad \forall k \in [\![2,n]\!],\ f(u_k) = a_k v\,.$$

Ainsi

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et cette matrice est semblable à A pour la même raison que précédemment.

12. Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. On a donc $AX = 0$ puis $A^\top AX = 0$ donc $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. Ainsi $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^\top A$. Soit maintenant $X \in \operatorname{Ker} A^\top A$. On a donc $A^\top AX = 0$ puis $X^\top A^\top AX = 0$. Notons $Y = AX$.

    Ainsi $Y^\top Y = 0$. Or, si on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a :

$$Y^\top Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

    donc $Y = 0$ *i.e* $AX = 0$. Ainsi, $X \in \operatorname{Ker} A$ et donc $KerA^\top A = \operatorname{Ker} A$. Par formule du rang, on a ensuite $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\top A)$.

► Systèmes linéaires

13. (a) Par les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in \{2, 3\}$ on obtient :

$$\begin{cases} x - y + z & = & m \\ (m+1)y - 2z & = & 1 - m \\ -2z & = & 1 - m \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - y + z & = & m \\ (m+1)y & = & 0 \\ z & = & \dfrac{m-1}{2} \end{cases}.$$

— Si $m \neq -1$, il y a une unique solution :

$$\left(\frac{m+1}{2}, 0, \frac{m-1}{2} \right).$$

— Si $m = -1$, l'ensemble solution est :

$$\{ (y, y, -1) \mid y \in \mathbb{C} \} = (0, 0, -1) + \operatorname{Vect}((1, 1, 0)).$$

(b) On a, par pivot de Gauss :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (1-m)y + \left(1 - m^2\right) z = 1 - m^3 & \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - m\,\mathrm{L}_3 \\ (m-1)y + (1-m)z = m - m^2 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \left(2 - m - m^2\right) z = \left(1 + m - m^2 - m^3\right) & \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \\ (m-1)y + (1-m)z = m - m^2 \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}.$$

On remarque que les racines de $X^2 + X - 2$ sont 1 et -2.

— Si $m = 1$, alors le système équivaut à $x + y + z = 1$. L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ (1 - y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

— Si $m = -2$, alors le système n'a pas de solution.

— Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors on trouve par remontée :

$$\begin{cases} z = \dfrac{m^3 + m^2 - m - 1}{m^2 + m - 2} = \dfrac{(m+1)^2}{m+2} \\ y = \dfrac{m - m^2}{m - 1} + z = \dfrac{1}{m+2} \\ x = m^2 - y - mz = -\dfrac{m+1}{m+2} \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions est donc le singleton

$$\left\{\left(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2}\right)\right\}.$$

(c) Si $m=1$, le système est incompatible. Sinon, on obtient par pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{c} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+mz+t=m+1 \\ (1-m)y+(m-1)z=1 \\ (m+2)z+t=\frac{m(m+1)}{m-1} \end{array}\right.$$

et donc l'ensemble des solutions est :

$$\left\{\left(z-\frac{m}{m-1}, y=z-\frac{1}{m-1}, z, \frac{m(m+1)}{m-1}-(m+2)z\right) \,\middle|\, z \in \mathbb{C}\right\}$$

14. Comme a, b, c sont deux à deux distincts, il existe par interpolation de Lagrange un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_2[X]$ tel que $P(a)=u_1$, $P(b)=u_2$ et $P(c)=u_3$. Si on pose $P=x+yX+zX^2$, on a bien que cette dernière condition est équivalente au système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & u_1 \\ x & + & by & + & b^2z & = & u_2 \\ x & + & cy & + & c^2z & = & u_3 \end{array}\right.,$$

d'où le résultat.

15. (a) F est l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^3$ distincts (car leurs équations ne sont pas proportionnelles) ; de fait on a déjà vu dans un TD précédent que $\dim(F)=3-2=1$. G quant à lui est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ donc $\dim(G)=2$.

(b) D'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F\cap G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F+G)=3-\dim(F+G).$$

— Si $m \neq 0$, alors l'équation de G n'est proportionnelle à aucune des équations des hyperplans dont F est l'intersection : on donc $F \not\subset G$ et donc il existe un vecteur $u \in G \setminus F$ *ergo*

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus \mathrm{Vect}(u) \subset F+G.$$

Dans ce cas, on a bien $\mathbb{R}^3=F+G$ et donc $\dim F\cap G=0$.

— Si $m=0$ alors $F \subset G$ et donc $\dim(F\cap G)=\dim(F)=1$.

▶ Approfondissements

16. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q=I_n$ pour un certain $q \geq 1$. On pose :

$$M=\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

On a alors :

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k\right)\left(\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} A^j\right) \\ &= \frac{1}{q^2}\sum_{k=0}^{q-1} A^k\left(\sum_{j=0}^{q-1} A^j\right). \end{aligned}$$

Si on fixe $k \in [\![0, q-1]\!]$, on a :

$$A^k\left(\sum_{j=0}^{q-1} A^j\right)=\sum_{j=0}^{q-1} A^{k+j}=\sum_{j=0}^{q-1} A^j$$

car la suite $(A^j)_j$ est q–périodique. *In fine*, on a :

$$M^2 = \frac{1}{q^2}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q-1} A^j = \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1} A^j = M$$

et donc l'application linéaire canoniquement associée à M est un projecteur. Ceci entraîne que :

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{Tr}(M) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{Tr}\left(A^k\right)$$

et que si $X \in \mathbb{K}^n$, $X \in \mathrm{Im}(M) \Leftrightarrow MX = X$.
Si $X \in \ker(A - I_n)$, il est clair que $MX = X$ et donc $X \in \mathrm{Im}(M)$. Réciproquement, si $MX = X$ alors

$$AX = (AM)X = MX = X$$

et donc *in fine*, $\mathrm{Im}(M) = \ker(A - I_n)$, d'où le résultat.

17. (a) Comme $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n) = F_1 + F_2$, tout élément de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$, et donc $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$, peut s'écrire comme la somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.

(b) On compose l'égalité $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_E$ par p_1 une fois à gauche et une fois à droite pour obtenir :

$$p_1^2 + p_1 \circ p_2 = p_1$$

et

$$p_1^2 + p_2 \circ p_1 = p_1\,.$$

On additionne ensuite ces deux égalités :

$$2p_1^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 2p_1\,.$$

Comme $p_1 \in F_1$ et $p_2 \in F_2$, $p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 = 0$. Ainsi $2p_1^2 = 2p_1$ et finalement $p_1^2 = p_1$ donc p_1 est un projecteur. Quitte à échanger p_1 et p_2, on démontre de même que p_2 est un projecteur.

(c) Soit $f \in F_1$. On a alors $f \circ p_2 + p_2 \circ f = 0$. Comme p_2 est un projecteur, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de p_2 est

$$\mathrm{P}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_r \end{array}\right)$$

avec $r = \mathrm{rg}\, p_2$.
Notons $\mathrm{F} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ la matrice de f dans cette même base $\mathscr{B}$ avec $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}), \mathrm{C} \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. On a donc $\mathrm{FP}_2 + \mathrm{P}_2\ \mathrm{F} = 0$, ce qui entraîne $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$. Par conséquent, $\mathrm{F} = \left(\begin{array}{c|c} 0_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & \mathrm{D} \end{array}\right)$.
Notons Φ l'isomorphisme qui associe à un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. On a donc $\Phi(F_1) \subset G$ où G est le sous-espace vectoriel des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & \mathrm{D} \end{array}\right)$ avec $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. Par conséquent $\dim(F_1) \leq \dim(G)$. Or $\dim(G) = (n-r)^2$ donc $\dim(F_1) \leq (n-r)^2 = (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$.
On prouve de la même manière que $\dim(F_2) \leq (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2$.

(d) Comme $F_1 \oplus F_2 = \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$, $\dim F_1 + \dim F_2 = n^2$. On déduit de la question précédente que

$$n^2 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$$

Comme $n - \mathrm{rg}\, p_1 \geq 0$ et $n - \mathrm{rg}\, p_2 \geq 0$,

$$(n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2 \leq \left[(n - \mathrm{rg}\, p_1) + (n - \mathrm{rg}\, p_2)\right]^2 = \left[2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)\right]^2$$

On sait que $p_1 + p_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. Donc $\mathrm{rg}\,(p_1+p_2) = n$. Or, comme on vérifie rapidement que $\mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2) \supset \mathrm{Im}(p_1+p_2)$, on a que

$$\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 \geq \dim(\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)) \geq \mathrm{rg}\,(p_1+p_2)\ .$$

On en déduit que $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 \geq n$. De plus $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 \leq 2n$ donc

$$[2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2 \leq n^2$$

Finalement,

$$n^2 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2 \leq [2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2 \leq n^2\,.$$

On en déduit que

$$[2n - (\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2)]^2 = n^2$$

i.e que $\mathrm{rg}\, p_1 + \mathrm{rg}\, p_2 = n$ et que $n^2 = (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 + (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2$. Notons $r = \mathrm{rg}\, p_1$. On a alors $n^2 = (n-r)^2 + r^2$ i.e. $r(n-r) = 0$. Deux cas se présentent.

— Si $r = 0$, alors $p_1 = 0$ et donc $p_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. On a alors $\dim F_1 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_2)^2 = 0$. Donc $F_1 = \{0\}$. Par conséquent $F_2 = \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$.

— Si $r = n$, alors $p_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. On a alors $\dim F_2 \leq (n - \mathrm{rg}\, p_1)^2 = 0$. Donc $F_2 = \{0\}$. Par conséquent $F_1 = \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$.

Réciproquement, on vérifie que ces deux couples (F_1, F_2) vérifient bien les hypothèses de l'énoncé.

18. Commençons par établir un lemme structurel sur les formes linéaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $f : A \mapsto (M \mapsto \mathrm{Tr}(AM))$ est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$. De plus, si $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \ker(f)$ alors pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AM) = 0$; en particulier si $i, j \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\mathrm{Tr}(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0$$

et donc $A = 0$. f est donc injectif donc bijectif par égalité dimensionnelle.
Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; alors il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ non nulle telle que $H = \ker(\varphi)$. D'après ce qui précède, il existe une matricde $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)\,.$$

En notant $r = \mathrm{rg}(A)$, on a l'existence de P et Q telle que $A = PJ_rQ$. On pose ensuite

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est inversible et vérifie :

$$\mathrm{Tr}\,(J_r N) = 0$$

Pour $M = Q^{-1}NP^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} T_A(M) &= \mathrm{Tr}\left(PJ_rQQ^{-1}NP^{-1}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(J_rNP^{-1}P\right) \\ &= \mathrm{Tr}\,(J_rN) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où M est inversible, et $M \in H$.