

ALGÈBRE LINÉAIRE MATRICIELLE

Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et n est un entier fixé dans \mathbb{N}^* .

► Matrices dans une base

- Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques *ad-hoc* :
 - $f : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$;
 - $g : (x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^3)$;
 - $h : (x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3, \mathbb{K})$;
 - $i : P \mapsto P' \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_3[X])$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y, y)$ et soient $\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (0, 1))$ et $\mathcal{B}_2 = ((1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$. Justifier que \mathcal{B}_1 (resp. \mathcal{B}_2) est une base de \mathbb{R}^2 (resp. de \mathbb{R}^3) et déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f)$.
- On pose $\mathcal{B} = (1, X + 1, 2X^2, X^3 + X)$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f : P \mapsto P' - P$. Justifier que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- On considère l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ canoniquement associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Justifier que la famille $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une base de \mathbb{K}^3 et déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
 - Déterminer, à l'aide d'un changement de base, la matrice de f^n dans la base canonique de \mathbb{K}^3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est A .

- Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans \mathcal{C} soit D .
- Déterminer une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ et calculer P^{-1} .
- Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire une expression du terme général des suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ et $(z_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}.$$

► Rang, trace

6. Déterminer le rang des matrices suivantes (pour $m \in \mathbb{C}$) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & m & -1 & 3 \\ m & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Les matrices suivantes sont-elles équivalentes ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Pour $n \geq 2$, déterminer le rang de la matrice $A = (i + j - 1)_{i, j \in [1, n]}$.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X + \text{Tr}(X)A = 0$.
10. (a) Soient $i, j, k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$; déterminer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.
 (b) En déduire que si $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ vérifie que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(BA)$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{Tr}$.
11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Démontrer qu'il existe deux familles non nulles de scalaires a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n telles que A soit semblable aux matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}.$$

12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\text{rg}(A^\top A) = \text{rg}(A)$.

► Systèmes linéaires

13. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

$$(a) \begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} ; \quad (b) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} ; \quad (c) \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases}.$$

14. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et soit $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3$. Démontrer que le système linéaire suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = u_1 \\ x + by + b^2z = u_2 \\ x + cy + c^2z = u_3 \end{cases}.$$

15. On considère, pour $m \in \mathbb{R}$, les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + my + z = 0 \text{ et } mx + y - mz = 0\}$$

et

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - my + z = 0\}.$$

- (a) Déterminer la dimension de F et G .
 (b) Calculer, selon la valeur de m , la dimension du sous-espace vectoriel $F \cap G$.

► Approfondissements

16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$ pour un certain $q \geq 1$. Montrer que

$$\dim(\ker(A - I_n)) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \text{Tr}(A^k)$$

17. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (f, g) \in F_1 \times F_2, f \circ g + g \circ f = 0$$

- (a) Justifier qu'il existe $(p_1, p_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $p_1 + p_2 = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$.
 (b) Montrer que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
 (c) Montrer que $\dim F_1 \leq (n - \text{rg}(p_2))^2$ et $\dim F_2 \leq (n - \text{rg}(p_1))^2$.
 (d) Quel est le nombre de choix possibles pour le couple (F_1, F_2) ?
18. Démontrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ intersecte $GL_n(\mathbb{K})$.

► Exercices CCINP

59 Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} de degré inférieur ou égal à n . On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

- Démontrer que f est bijectif de deux manières :
 - sans utiliser une matrice de f .
 - en utilisant une matrice de f .
- Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$. *Indication* : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

69 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

- Déterminer le rang de A .

71 Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

- Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- Soit p la projection vectorielle de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D . Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.