

INTÉGRATION

Dans toute la suite, a et b désignent deux nombres réels tels que $a < b$.

► Calculs d'intégrales

1. (a)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^1 \frac{1/\sqrt{5}}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

(b) En remarquant que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\tan^3(x) + \tan(x) = \tan(x)(1 + \tan^2(x)) = \tan(x) \tan'(x)$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) \tan'(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx \\ &= \left[\frac{\tan^2(x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1 - \ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

(c) Remarquons que si $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ on a ;

$$\frac{1}{\tan^3(x)} + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1 + \tan^2(x)}{\tan^3(x)} = \frac{\tan'(x)}{\tan^3(x)}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan^3(x)} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan'(x)}{\tan^3(x)} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan(x)} \\ &= 2 \left[\frac{-1}{\tan^2(x)} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - [\ln(\sin(x))]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{6} \left(2 - 3 \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

(d)

$$\int_0^2 x(x - [x]) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(x - 1) dx = \frac{7}{6}$$

(e) Il suffit de se rappeler que pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}} = \ln\left(1 + \sqrt{\frac{6}{5}}\right).$$

(f)

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} [\ln(x)^2]_1^e = \frac{1}{2}.$$

(g)

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^2} dx = - \left[\frac{1}{(x^2+3x+7)} \right]_0^1 = \frac{2}{63}.$$

(h)

$$\int_0^{\ln(\pi)} e^x \sin(e^x) dx = - [\cos(e^x)]_0^{\ln(\pi)} = 1 + \cos(1).$$

(i)

$$\int_1^2 \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)^5} dx = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\operatorname{sh}(x)^4} \right]_1^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(1)^4} - \frac{1}{\operatorname{sh}(2)^4} \right).$$

2. (a) Pour $q \in \mathbb{N}$, on trouve :

$$I_{0,q} = \int_0^1 (1-x)^q dx = \frac{1}{q+1}.$$

(b) Soit $p > 0$ et $q \in \mathbb{N}$; alors, par intégration par parties :

$$I_{p,q} = \left[-\frac{x^p(1-x)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 + \frac{p}{q+1} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1} dx = \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}.$$

On démontre alors, par récurrence sur p à q fixé que :

$$I_{p,q} = \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} \times \dots \times \frac{2}{q+p} \times I_{0,p+q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

i.e

$$I_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1) \binom{p+q}{p}}.$$

3. On trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int_{\pi/4}^0 \sqrt{\frac{1-\cos(2t)}{1+\cos(2t)}} (-2 \sin(2t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{2 \sin^2(t)}{2 \cos^2(t)}} (4 \sin(t) \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/4} 4 \sin^2(t) dt \text{ par positivité de sin et cos sur } [0, \pi/4] \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} (1 - \cos(2t)) dt \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

4. Il suffit de poser le changement de variable $t = e^{i\theta}$, qui donne :

$$\int_{-1}^1 Q(t) dt = \int_{\pi}^0 Q(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^{\pi} Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta.$$

► Intégrale de Riemann

5. (a) Si on fixe G une primitive de la fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $g : t \mapsto \frac{e^t}{t-1}$, alors pour tout $x \in]-1, +\infty[\setminus \{1\}$ on a $[x, x^2]$ (ou $[x^2, x]$) inclus dans $] -1, +\infty[\setminus \{1\}$ et :

$$F(x) = G(x^2) - G(x)$$

et donc F est bien définie et de classe \mathcal{C}^0 par composition sur $] -1, +\infty[\setminus \{1\}$. Au voisinage de 1, on peut remarquer que :

$$\frac{e^x - e}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \exp'(1) = e$$

et donc la fonction $x \mapsto \frac{e^x - e}{x - 1}$ est bornée au voisinage de 1. De fait, il existe $M > 0$ tel que l'on ait, au voisinage de 1 :

$$\left| \int_x^{x^2} \frac{e^t - e}{t - 1} dt \right| \leq M|x^2 - x| \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x) - e \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} + e \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} \\ &= \int_x^{x^2} \frac{e^t - e}{t-1} dt + e \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} \\ &= \int_x^{x^2} \frac{e^t - e}{t-1} dt + e \ln|x+1| \end{aligned}$$

et donc $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} e \ln(2)$: la fonction F se prolonge par continuité en 1.

(b) La fonction F est de classe \mathcal{C}^1 par composition sur $] -1, +\infty[\setminus\{1\}$ et

$$\forall x \in] -1, +\infty[\setminus\{1\}, \quad F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2xe^{x^2}}{x^2 - 1} - \frac{e^x}{x - 1}.$$

En posant $h = x - 1$, on a :

$$\begin{aligned} F'(1+h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{2(1+h)e^{(1+h)^2}}{h(h+2)} - \frac{e^{1+h}}{h} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{2(1+h)e^{h(h+2)+1} - (h+2)e^{1+h}}{h(h+2)} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{h(h+2)} \left(2(1+h)e^{h^2}e^{2h} - (h+2)e^h \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{h(h+2)} \left(2(1+h)(1+o(h))(1+2h+o(h)) - (h+2)(1+h+o(h)) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{h(h+2)} \left(2(1+h)(1+2h) - (h+2)(1+h) + o(h^2) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{h(h+2)} \left((1+h)(2+4h-h-2) + o(h^2) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{e}{h(h+2)} \left(3(h+1)h + o(h^2) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{3e}{2}. \end{aligned}$$

De fait, F' admet une limite finie en 1 et donc, par théorème de limite de la dérivée, F se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$ en posant $F'(1) = \frac{3e}{2}$.

6. (a) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ étant continue sur $]1, \infty[$, on peut en considérer une primitive F sur cet ensemble. On a alors :

$$\forall x \in]1, \infty[, \quad H(x) = F(x^2) - F(x) \quad \text{car } [x, x^2] \subset]1, \infty[,$$

ce qui définit une fonction de classe \mathcal{C}^1 par composition. On a de plus, pour $x > 1$:

$$H'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

(b) En posant $x = 1 + h$, on a (au voisinage de 0 en h) :

$$u(1+h) = \frac{h - \ln(1+h)}{h \cdot \ln(1+h)}$$

Or $h - \ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)$ donc $h - \ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}h^2$. De plus, $h \ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h^2$ donc :

$$u(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = \frac{1}{2}$.

(c) En utilisant u , on a

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad H(x) = \int_x^{x^2} u(t) dt + \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \int_x^{x^2} u(t) dt + \ln(x+1)$$

La fonction u est continue sur $]1; +\infty[$ et admet une limite finie en 1, donc u est prolongeable par continuité en 1. Notons u_1 ce prolongement continu sur $[1; +\infty[$. Alors :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad \int_x^{x^2} u(t) dt = \int_x^{x^2} u_1(t) dt.$$

Posons alors pour $x \in [1; +\infty[$,

$$U_1(x) = \int_x^{x^2} u_1(t) dt.$$

Pour les mêmes raisons que dans la question (a), U_1 est dérivable, donc continue, sur $[1; +\infty[$. De fait $\lim_{x \rightarrow 1} U_1(x) = U_1(1) = 0$. D'après (b), a donc

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^2} u(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1^+} U_1(x) = 0.$$

On en déduit, d'après (a), que $\lim_{x \rightarrow 1^+} H(x) = \ln(2)$.

7. Pour $x \in [a, b]$, posons $F(x) = \int_a^x f(t) dt$; ceci définit une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[a, b]$ car f y est continue. Par théorème des accroissements finis, il existe alors $c \in]a, b[$ tel que :

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

soit :

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt.$$

8. Par intégration par parties, les fonctions considérées étant de classe \mathcal{C}^1 on a, pour $\lambda > 0$:

$$\int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = \frac{-1}{\lambda} [f(x) \cos(\lambda x)]_a^b + \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(x) \cos(\lambda x) dx$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx \right| &= \left| \frac{-1}{\lambda} [f(x) \cos(\lambda x)]_a^b + \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(x) \cos(\lambda x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(a) \cos(\lambda a)| + |f(b) \cos(\lambda b)| + \int_a^b |f'(x) \cos(\lambda x)| dx \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right) \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

9. (a) Soit ≥ 1 ; alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{k^2 + n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}}.$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction continue $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ sur $[0, 1]$ et donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{k^2+n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \left[\sqrt{t^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

(b) Soit $h \in \mathbb{N}^*$; alors on remarque que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1]$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2).$$

(c) Pour $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (n+k)} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (n+k)} = \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)} > 0$$

et donc on peut poser

$$u_n = \ln \left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (n+k)} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right).$$

Il s'agit d'une somme de Riemann sur $[0, 1]$ associée à la fonction continue

$$f : t \mapsto \ln(1+t)$$

et donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+t) dt = [(t+1)(\ln(t+1) - 1)]_0^1 = \ln(4) - 1.$$

Par continuité de l'exponentielle, on a alors :

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (n+k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{e}.$$

10. On peut écrire, pour $n \geq 1$:

$$u_n = n^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right).$$

Par somme de Riemann, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} \left(1 - \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx.$$

On calcule donc cette intégrale :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - (2x-1)^2} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} du \text{ via le changement de variable } x = \frac{u+1}{2} \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sqrt{1-\cos^2(t)} \sin(t) dt \text{ avec } u = \cos(t) \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2(t) dt \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^\pi (1 - \cos(2t)) dt \\
 &= \frac{\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

In fine, on a donc $u_n \sim \frac{\pi n^2}{8}$.

11. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$, elle est donc bornée sur cet ensemble : il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall t \in [0, 1], \quad |f(t)| \leq M.$$

Ainsi, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq \int_0^1 t^n |f(t)| dt \leq \int_0^1 M t^n dt = \frac{M}{n+1}.$$

et donc, par théorème d'existence par encadrement :

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

12. (a) Posons

$$\tilde{\varphi} : t \mapsto \left(C + K \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right) e^{-K(t-t_0)}.$$

L'hypothèse équivaut alors à l'inégalité suivante, pour $t \in I$ tel que $t \geq t_0$:

$$\varphi(t) \leq \tilde{\varphi}(t) e^{K(t-t_0)}.$$

La fonction $\tilde{\varphi}$ est dérivable sur I et, avec les mêmes hypothèses sur t :

$$\tilde{\varphi}'(t) = -K\tilde{\varphi}(t) + K e^{-K(mt-t_0)} \varphi(t) \leq 0$$

$\tilde{\varphi}$ est donc décroissante et pour tout $t \geq t_0$, $\tilde{\varphi}(t) \leq \tilde{\varphi}(t_0) = C$ qui permet de conclure.

- (b) Si on suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) = 0$ alors :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \int_{t_0}^t y'(s) ds \leq K \int_{t_0}^t y(s) ds \leq 0 + K \left| \int_{t_0}^t y(s) ds \right|.$$

D'après le lemme de Gronwall, nous avons donc $\forall t \in I, y(t) \leq 0$, d'où le résultat par positivité de y .

► Formules de Taylor

13. (a) Posons $f : x \mapsto \ln(1+x)$: cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, \infty[$ et on a par une récurrence aussi plaisante que de regarder la peinture sécher que :

$$\forall n \geq 1, \forall x > -1, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

- (b) Fixons $x \in [0, 1]$ et $n \geq 1$ et appliquons l'inégalité de Taylor–Lagrange à f entre 0 et x : il existe donc un réel $R_n(x)$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_n(x) \quad \text{et} \quad |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[0,x]} |f^{(n+1)}|.$$

On a donc, en combinant tout ceci :

$$0 \leq \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} n!$$

car $|f^{(n+1)}|$ est majorée par $n!$ sur son ensemble de définition. Or

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} n! = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et donc par théorème d'existence par encadrement :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(1+x).$$

14. (a) Comme P est de degré impair, il admet une racine réelle, soit a . Par hypothèse on a alors :

$$\forall n \geq 0, \quad |f^{(n)}(a)| \leq |P(a)| = 0$$

et donc $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout entier n . Soit $x \in \mathbb{R}$; on applique alors l'inégalité de Taylor–Lagrange à la fonction f entre a et x pour obtenir l'existence d'un réel $R_n(x)$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} \underbrace{f^{(k)}(a)}_{=0} + R_n(x) \quad \text{et} \quad |R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{x,n}.$$

avec $M_{x,n}$ le maximum de la fonction continue $|f^{(n+1)}|$ entre a et x (ou entre x et a , mais dans tous les cas sur un segment donc aucun soucis d'existence, merci les bornes atteintes !). Mais par hypothèse $M_{x,n}$ peut être majoré indépendamment de n par le maximum de la fonction continue $|P|$ sur ce même segment. On a donc :

$$0 \leq |f(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} P_x.$$

Or, par formule de Stirling, on a :

$$\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} P_x \sim \left(\frac{|x-a|e}{n+1} \right)^{n+1} \frac{P_x}{\sqrt{2\pi(n+1)}}$$

et

$$\left(\frac{|x-a|e}{n+1} \right)^{n+1} = \exp((n+1)(\ln(|x-a|e) - \ln(n+1))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et donc par encadrement, on a $R_n(x) \rightarrow 0$ ergo $f = 0$.

- (b) Non ; on obtient un contre-exemple en posant $P = 1$ et $f = \cos$.

15. Par théorème des bornes atteintes, on peut poser $\|f''\|_\infty = \max\{|f''(t)| \mid t \in [0, 1]\}$, la dérivée seconde de f étant continue. Par l'inégalité de Taylor Lagrange on a alors :

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) - \frac{1}{2}f'(0) \right| \leq \frac{1}{8} \|f''\|_\infty$$

et

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) + \frac{1}{2}f'(1) \right| \leq \frac{1}{8} \|f''\|_\infty.$$

On en déduit

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{8} |f''|_\infty \quad \text{et} \quad \left| \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| - |f(1)| \right| \leq \frac{1}{8} \|f''\|_\infty$$

donc

$$1 = |f(1)| \leq |f(1)| - \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{4} |f''|_\infty$$

ergo $|f''|_\infty \geq 4$. Ce maximum étant atteint en un certain $c \in [0, 1]$, on obtient le résultat voulu.

► Approfondissements

16. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} . Si elle admettait une primitive, celle-ci devrait être de la forme $x \mapsto (x+c)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} + d$ avec $c, d \in \mathbb{R}$. La dérivabilité en 0 posera un problème irrémédiable.
17. Si $a^2 \leq b^2$, on effectue le changement de variable $x = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \sin \theta$. Ainsi, en notant I l'intégrale à calculer :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \sin \theta \right) \sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{2} \right)^2 (1+\sin \theta)(1-\sin \theta)} \frac{b^2-a^2}{2} \cos \theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{b^2-a^2}{2} \right)^2 \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \quad \text{car } \frac{b^2-a^2}{2} \geq 0 \\ &= \left(\frac{b^2-a^2}{2} \right)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \sin \theta \right) \cos^2 \theta d\theta \quad \text{car } \cos \theta \geq 0 \text{ pour } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \left(\frac{b^2-a^2}{2} \right)^2 \left[\frac{a^2+b^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + \frac{b^2-a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \left(\frac{b^2-a^2}{2} \right)^2 \frac{a^2+b^2}{2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{16} (b^2-a^2)^2 (a^2+b^2) \pi. \end{aligned}$$

Si $a^2 \geq b^2$, on trouve de la même façon :

$$\int_{a^2}^{b^2} x \sqrt{(x-a^2)(b^2-x)} dx = \frac{-1}{16} (b^2-a^2)^2 (a^2+b^2) \pi.$$

18. Posons, pour n assez grand, $v_n = \ln(u_n)$ et notons M un réel tel que $|f| \leq M$ sur $[0, 1]$ (un tel réel existe car f est continue sur le segment $[0, 1]$). L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en 0 appliquée à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ entraîne, pour n assez grand et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, que :

$$\left| \ln \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M^2 C}{n^2},$$

où C est une constante positive. Nous avons donc

$$\left| v_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M^2 C}{n}$$

De l'inégalité ci-dessus et de la convergence de la somme de Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ vers $\int_0^1 f(t) dt$, on peut déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite $\int_0^1 f(t) dt$. Par continuité de la fonction exponentielle, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc convergente vers $\exp\left(\int_0^1 f(t) dt\right)$.