Intégration

Dans toute la suite, a et b désignent deux nombres réels tels que $a < b$.

▶ Calculs d'intégrales

1. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5}$; (d) $\displaystyle\int_0^2 x(x-\lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x$; (g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^2}\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3(x)\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+5}}$; (h) $\displaystyle\int_0^{\ln(\pi)} e^x \sin\left(e^x\right)\,\mathrm{d}x$;
   (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\tan^3(x)}$; (f) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$; (i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)^5}\,\mathrm{d}x$.
2. Soient $p, q \in \mathbb{N}$; on pose
$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x\,.$$
   (a) Pour $q \in \mathbb{N}$, calculer $I_{0,q}$.
   (b) Si $p > 0$, déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p-1,q+1}$. En déduire $I_{p,q}$ dans le cas général.
3. En posant le changement de variable $x = \cos(2t)$, calculer
$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x\,.$$
4. Démontrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ on a :
$$\int_{-1}^1 Q(t)\mathrm{d}t = -i\int_0^\pi Q\left(e^{i\theta}\right)\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

▶ Intégrale de Riemann

5. (a) Établir que la fonction suivante se prolonge par continuité sur l'intervalle $]-1,\infty[$:
$$F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t-1}\,\mathrm{d}t\,.$$
   (b) Établir que ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,\infty[$ et calculer sa dérivée.
6. *Ancien exercice de la banque CCINP.* On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par
$$H : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}\,.$$
   (a) Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Démontrer que la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en 1.
   (c) Calculer la limite en 1^+de la fonction H.
7. *Formule de la moyenne.* Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$; démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
8. *Lemme de Riemann–Lebesgue.* Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$; démontrer que
$$\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0\,.$$

9. Déterminer la limite quand $n \to \infty$ des quantités suivantes :
   (a) $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{k^2+n^2}}$; (b) $\displaystyle \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$; (c) $\displaystyle \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(n+k)}$.
10. Déterminer un équivalent de la suite définie par :
$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\sqrt{n-k}\,.$$
11. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$; établir que
$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$
12. *Lemme de Gronwall et application.* On fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.
   (a) Soit $t_0 \in I$ et soit $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que :
$$\exists\, C, K \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in I, \quad \varphi(t) \leq C + K\left|\int_{t_0}^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right|\,.$$
   Démontrer que $\forall t \in I$, $\varphi(t) \leq Ce^{K|t-t_0|}$.
   (b) Soit $y \in \mathscr{C}^1(I)$ à valeurs positives telle que :
$$\exists K \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in I, \quad y'(t) \leq Ky(t)\,.$$
   Démontrer que soit y ne s'annule jamais, soit y est la fonction nulle.

▶ Formules de Taylor

13. (a) Déterminer (en justifiant leur existence) les dérivées successives de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
   (b) En déduire que
$$\forall x \in [0,1], \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(1+x)\,.$$
14. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré impair vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}| \leq |P|\,.$$
   (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$. En déduire que $f = 0$.
   (b) Le résultat reste–il vrai si l'on suppose $\deg(P)$ pair ?
15. Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1])$ vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

▶ Approfondissements

16. Déterminer une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et n'y admettant pas de primitive.
17. Calculer $\displaystyle\int_{a^2}^{b^2} x\sqrt{(x-a^2)\,(b^2-x)}\mathrm{d}x$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
18. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose,
$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.