

► Calculs de dimension

1. La famille est libre car composée de 2 vecteurs non colinéaires. Il s'agit donc d'une base car son cardinal est égal à la dimension de \mathbb{C} comme \mathbb{R} -e.v.
2. D'après le cours, si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nz.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ s'écrit sous la forme $(u_n)_n = u_0 \cdot (1)_n + z \cdot (n)_n$. La famille $((1)_n, (n)_n)$ étant libre (car composée de deux vecteurs non colinéaires), il s'agit d'une base de l'espace considéré (qui est donc de dimension 2).

3. La famille considérée est libre : en effet, si on suppose trouvée $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \exp + \mu \cos + \nu \sin = 0$ alors, en évaluant en $0, \pi$ et $\frac{\pi}{2}$ on obtient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda e^\pi - \mu &= 0 \\ \lambda e^{\frac{\pi}{2}} + \nu &= 0 \end{cases}$$

ce qui donne rapidement $\lambda = \mu = \nu = 0$. De fait, $\dim(\text{Vect}(\exp, \cos, \sin)) = \text{Card}(\text{Vect}(\exp, \cos, \sin)) = 3$.

4. (a) Cette famille est libre donc de rang égal à son cardinal, ici 3.
 (b) Comme $x_3 = x_1 + x_2$ et $x_4 = x_1 - x_2$, on a $\text{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{Vect}(x_1, x_2)$. Comme (x_1, x_2) est libre, on a $\text{rg}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{rg}(x_1, x_2) = 2$.
 (c) Ici encore, on vérifie rapidement que la famille est libre.
5. On sait que

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 4 - \dim(F \cap G).$$

On en déduit, comme $\dim(F + G) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, que $\dim(F \cap G) > 0$: la somme ne sera jamais directe. De plus, $F \cap G \subset F$ donc $\dim F \cap G \in \{1, 2\}$. Comme $F \neq G$, il est impossible que $\dim(F \cap G) = 2$ (car sinon par égalité dimensionnelle et inclusion on aurait $F = F \cap G$ et donc $F = G$), ergo $\dim(F \cap G) = 1$ et donc $\dim(F + G) = 3$. Par égalité dimensionnelle et inclusion, on a bien $F + G = \mathbb{R}^3$.

6. (a) On a clairement $G = \{(x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, ainsi $G = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 0, 0)$. G est donc un s—e.v de E de dimension 2 (les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires. Un vecteur (x, y, z, t) appartient à F si et seulement si

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2x - y + 3z - 4t = 0 \end{cases}$$

i.e, par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$,

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

d'où,

$$\begin{cases} y = -z + 2t \\ x = -2z + 3t \end{cases}.$$

Ainsi,

$$F = \{(-2z + 3t, -z + 2t, z, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(v_1, v_2),$$

avec $v_1 = (-2, -1, 1, 0)$ et $v_2 = (3, 2, 0, 1)$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, on a $\dim(F) = 2$.

Puisque $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, pour établir que F et G sont supplémentaires dans E , il suffit de vérifier que $F \cap G = \{0\}$. Soit $(x, y, z, t) \in F \cap G$; on a alors $z = t = 0$ et donc $(x, y, z, t) = 0$ d'après les calculs menés *supra*. On a donc que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, v_1, v_2)$ est une base de E adaptée à la décomposition en somme directe $F \oplus G = E$.

- (b) Soit $(x, y, z, t) \in E$. D'après la question précédente, il existe un unique $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$(x, y, z, t) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma v_1 + \delta v_2$$

i.e

$$\begin{cases} a - 2\gamma + 3\delta = x \\ \beta - \gamma + 2\delta = y \\ \gamma = z \\ \delta = t \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} a = x + y + 2z - 3t \\ \beta = z - 2t \\ \gamma = z \\ \delta = t \end{cases}.$$

La projection de (x, y, z, t) sur F parallèlement à G vaut donc,

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = (x + 2z - 3t, y + z - 2t, 0, 0).$$

7. On a, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f_1(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) + f_4(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) - f_4(x)$$

donc $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \text{rg}(f_3, f_4) = 2$ car (f_3, f_4) est libre (deux vecteurs non colinéaires).

8. (a) L'endomorphisme $(x, y) \mapsto (0, x)$ convient pour $p = 2$ et $E = \mathbb{K}^2$.

- (b) Comme $u^{p-1} \neq 0$, il existe un vecteur $x \notin \ker(u^{p-1})$. Supposons alors trouvés $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Alors, en composant par u^{p-1} à gauche cette égalité, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{k+p-1}(x) = u^{p-1}(0)$$

soit, comme $u^p = 0$ (et donc $u^j = 0$ pour tout $j \geq p$) :

$$\lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0.$$

Comme $u^{p-1}(x) \neq 0$, on a que $\lambda_{p-1} = 0$. En itérant ce procédé (on compose l'égalité initiale par $u^{p-2}, u^{p-3}, \dots, u$ en éliminant successivement les λ_k par ordre décroissant), on obtient que les λ_k sont tous nuls, et donc que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.

- (c) Le cardinal d'une famille libre étant toujours inférieur à la dimension de l'espace auquel ses vecteurs appartiennent, on a que $\dim(E) \geq p$.

► Théorème du rang

9. On démontre ceci de façon cyclique.

(i) \Rightarrow (ii) Supposons $\ker(f) = \ker(f^2)$; si on se donne $x \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$ alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $f(x) = 0$. De fait, $f(f(y)) = 0$ donc $y \in \ker(f^2)$. Par hypothèse, $f(y) = 0$ et donc x est bien le vecteur nul.

(ii) \Rightarrow (iii) Supposons $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$; alors par théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f) + \text{Im}(f)) + \underbrace{\dim(\ker(f) \cap \text{Im}(f))}_{=0}$$

et donc par inclusion et égalité dimensionnelle on a bien $E = \text{Im}(f) + \ker(f)$.

(iii) \Rightarrow (iv) $E = \text{Im}(f) + \ker(f)$ et commençons par noter que si $y \in \text{Im}(f^2)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x) = f(f(x)) \in \text{Im}(f)$ et donc $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$. Réciproquement, si $y \in \text{Im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, par hypothèse, il existe $u \in \ker(f)$ et $v \in \text{Im}(f)$ tels que $x = u + v$. En se donnant $w \in E$ tel que $v = f(w)$, on obtient

$$y = f(u + v) = f(u) + f(f(w)) = f^2(w) \in \text{Im}(f^2)$$

et donc on a l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

(iv) \Rightarrow (i) Supposons $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. Si $x \in \ker(f)$ alors $f^2(x) = f(0) = 0$ donc on a $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. De plus, par théorème du rang, on a :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\ker(f^2)) + \text{rg}(f^2)$$

et donc il suffit de remarquer que $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$ pour obtenir $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^2))$. Par inclusion et égalité dimensionnelle, $\ker(f) = \ker(f^2)$.

10. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$; alors si $x \in \ker(u^k)$ on a $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$ donc $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$. Si $y \in \text{Im}(u^{k+1})$ alors il existe un $x \in E$ tel que $y = u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) \in \text{Im}(u^k)$ donc $\text{Im}(u^k) \supset \text{Im}(u^{k+1})$.
- (b) D'après la question précédente, la suite des $(\dim(\ker(u^k)))_k$ est une suite croissante bornée par $\dim(E)$: elle est donc convergente. Comme il s'agit d'une suite d'entiers, c'est un exercice classique de montrer qu'elle est stationnaire : il existe donc un entier p tel que $\forall k \geq p, \dim(\ker(u^k)) = \dim(\ker(u^p))$. Or $\ker(u^p) \subset \ker(u^k)$ donc par égalité dimensionnelle et inclusion on a :

$$\forall k \geq p, \quad \ker(u^k) = \ker(u^p).$$

Le théorème du rang impose par ailleurs que si la suite des dimensions des $\ker(u^k)$ est stationnaire au rang p , alors celle des $\text{rg}(u^k)$ l'est également (les deux suites diffèrent d'une constante). Un raisonnement similaire à base d'inclusion et dimension nous donne l'égalité des images itérées à partir du rang p .

11. (a) Soit $x \in \ker(u) \cap \text{Im}(v)$; alors $u(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $v(y) = x$. Ainsi :

$$v \circ u \circ v(y) = v(u(x)) = v(0) = 0$$

et donc, comme $v \circ u \circ v = v$, $x = v(y) = 0$: $\ker(u)$ et $\text{Im}(v)$ sont en somme directe. Fixons ensuite $x \in E$; alors $x - v \circ u(x) \in \ker(u)$ car $u = u \circ v \circ u$. Ainsi :

$$x = \underbrace{v(u(x))}_{\in \text{Im}(v)} + \underbrace{x - v(u(x))}_{\in \ker(u)}$$

et donc $E = \ker(u) + \text{Im}(v)$. *In fine*, $\text{Im}(v)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires dans E .

- (b) Par théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \text{rg}(u)$. Or, en passant à la dimension dans la décomposition en somme directe de la question (a), on obtient que

$$\dim(E) = \dim(\ker(u) \oplus \text{Im}(v)) = \dim(\ker(u)) + \text{rg}(v).$$

Le résultat est obtenu par soustraction de ces deux relations.

12. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \bar{v} : \text{Im}(u) &\rightarrow G \\ x &\mapsto v(x). \end{aligned}$$

Cette application est linéaire comme restriction d'une application linéaire et vérifie $\ker(\bar{v}) = \ker(v) \cap \text{Im}(u)$. De plus :

$$\text{Im}(\bar{v}) = v(\text{Im}(u)) = v(u(E)) = v \circ u(E) = \text{Im}(v \circ u)$$

et donc, par théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\ker(\bar{v})) + \dim(\text{Im}(\bar{v}))$$

i.e

$$\text{rg}(u) = \dim(\ker(v) \cap \text{Im}(u)) + \text{rg}(v \circ u)$$

d'où le résultat.

13. (a) Commençons par remarquer que $\text{Im}(f \circ g) = f(g(E))$ donc $\dim(\text{Im}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Im}(f))$ et $\dim(\text{Im}(f \circ g)) \leq \dim(g(E)) = \text{rg}(g)$, d'où l'inégalité de droite. Ensuite, on applique le résultat de l'exercice précédent pour obtenir :

$$\begin{aligned} \text{rg}(f \circ g) &= \text{rg}(g) - \dim(\ker(f) \cap \text{Im}(g)) \\ &\geq \text{rg}(g) - \dim(\ker(f)) \text{ par inclusion} \\ &= \text{rg}(g) - (n - \text{rg}(f)) \text{ par formule du rang} \\ &= \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n. \end{aligned}$$

- (b) On vérifie aisément que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ donc

$$\text{rg}(f + g) \leq \dim(\text{Im } f + \text{Im } g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Puisque $f = f + g + (-g)$, on a

$$\text{rg}(f) \leq \text{rg}(f + g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f + g) + \text{rg}(g).$$

Aussi $\text{rg}(g) \leq \text{rg}(f + g) + \text{rg}(f)$ donc

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g)$$

14. Supposons $f^2 = 0$ et $\text{rg}(f) = p$. Alors on a rapidement que $\text{Im}(f) \subset (\ker(f))$ et par théorème du rang $\dim(\ker(f)) = n - p = p$, d'où l'égalité voulue par dimension et inclusion.

Réciproquement, si on suppose que $\text{Im}(f) = \ker(f)$ alors, toujours par théorème du rang, $n = 2\text{rg}(f)$ donc $\text{rg}(f) = p$. De plus, il est clair que $f^2 = 0$ par hypothèse, d'où le résultat.

15. (a) On a

$$E = \text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$$

donc $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \geq n$ ergo $\text{rg } u + \text{rg } v = n$, ce qui entraîne par formule de Grassmann que $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) = 0$, d'où le résultat.

- (b) Si $x \in \ker u$ alors $x = u(x) + v(x) = v(x)$ donc $x \in \text{Im } v$. Par les dimensions, on conclut $\ker u = \text{Im } v$ et de même $\ker v = \text{Im } u$. Par suite $u \circ v = v \circ u = 0$ et donc :

$$u = (u + v) \circ u = u^2 \quad \text{et} \quad v = (u + v) \circ v = v^2.$$

► Formes linéaires et hyperplans

16. (a) En dimension 1, le seul hyperplan est l'espace nul.
 (b) Puisque les deux hyperplans sont distincts, il existe $u \in H_1 \setminus H_2$. On a donc

$$E = H_2 \oplus \text{Vect}(u) \subset H_2 + H_1 \subset E$$

ainsi $E = H_1 + H_2$ et d'après la formule de Grassmann,

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2.$$

17. (a) La famille est de rang 2 et se complète par $e_3 = (0, 0, 1)$.

- (b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; alors :

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + (z - x)e_3$$

donc les formes linéaires coordonnées associées sont :

$$e_1^* : (x, y, z) \mapsto x, \quad e_2^* : (x, y, z) \mapsto y \quad \text{et} \quad e_3^* : (x, y, z) \mapsto z - x.$$

18. (a) On trouve aisément, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 , $\varphi_1 = e_2^* + e_3^*$, $\varphi_2 = 2e_1^* + 3e_2^* - e_3^*$ et $\varphi_3 = 8e_2^*$.

- (b) La famille considérée est libre : en effet, si on suppose qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0$ alors, en évaluant en e_1, e_2 et e_3 on obtient :

$$\begin{cases} 2\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \end{cases}$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. De fait, le rang de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est égal à son cardinal, soit 3.

► Approfondissements

19. Considérons l'application

$$\begin{aligned}\phi : E &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ f &\longmapsto (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))\end{aligned}$$

L'application ϕ est clairement linéaire. Soit $f \in \ker \phi$. Il existe (a_0, a_1, \dots, a_n) et (b_0, b_1, \dots, b_n) dans \mathbb{R}^{n+1} tels que $f_{[[x_i=x_{i+1}]]} : x \mapsto a_i x + b_i$. Pour tout $i \in [0; n-1]$

$$\begin{cases} a_i x_i + b_i = 0 \\ a_i x_{i+1} + b_i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_i(x_{i+1} - x_i) = 0 \\ a_i x_i + b_i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_i = 0 \\ b_i = 0 \end{cases}$$

Ainsi $f = 0$ et ϕ est surjective. Soit $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Cherchons $f \in E$ telle que $\phi(f) = y$. En prenant les mêmes notations que précédemment, on cherche donc (a_0, a_1, \dots, a_n) et (b_0, b_1, \dots, b_n) dans \mathbb{R}^{n+1} tels que

$$\begin{cases} a_i x_i + b_i = y_i \\ a_i x_{i+1} + b_i = y_{i+1} \end{cases} \iff \begin{cases} a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \\ b_i = y_i - a_i x_i \end{cases}$$

Ce qui montre que ϕ est surjective. Donc ϕ est un isomorphisme et $\dim F = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n+1$. On obtient facilement une base $(e_i)_{0 \leq i \leq n}$ de E en considérant l'image réciproque de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . Il s'agit de la base admettant pour formes coordonnées la famille $(e_i^*)_{0 \leq i \leq n}$ de F^* avec $e_i^*(f) = f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$. Pour $0 \leq i \leq n$, e_i est la fonction affine par morceaux valant 1 en x_i et 0 en les x_j avec $j \neq i$.

20. Supposons que $v \in \mathcal{L}(E)$ réponde au problème posé. On obtient $\text{Im } u \subset \ker(u)$ et donc $\text{rg } v \leq n - \text{rg } u$ et $n = \text{rg}(u+v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$. On a donc $n = \text{rg } u + \text{rg } v$, et par suite $\text{Im } v = \ker u$, et $\text{Im } u + \text{Im } v = E$ (car $E = \text{Im}(u+v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$). Cette somme est directe et on conclut que

$$\ker u \oplus \text{Im } u = E.$$

Réciproquement, supposons $\ker(u) \oplus \text{Im } u = E$. Soit v le projecteur sur $\ker u$ parallèlement à $\text{Im } u$. On a évidemment $u \circ v = 0$. Montrons que de plus $u+v \in \text{GL}(E)$. Soit $x \in E$ tel que $(u+v)(x) = 0$. On a alors $u(x) = -v(x) \in \ker u \cap \text{Im } u = \{0\}$. Donc $u(x) = v(x) = 0$ et $x \in \ker u \cap \text{Im } u = \{0\}$. On a donc $\text{Ker}(u+v) = \{0\}$ et $u+v \in \text{GL}(E)$.

Une condition nécessaire et suffisante d'existence de v est donc $\text{Im } u \oplus \ker u = E$.

21. (a) La suite nulle est évidemment périodique. Soient $u, v \in \mathbb{E}_p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda u_{n+p} + u_{n+p} = \lambda u_n + u_n$$

car u et v sont p -périodiques. Ainsi $\lambda u + v$ est également p -périodique, ce qui prouve que \mathbb{E}_p est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

(b) Tout d'abord, les suites u^0, \dots, u^{p-1} sont bien p -périodiques puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+p \equiv n[p]$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 u^0 + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1} = 0$. En considérant les termes de rang $0, \dots, p-1$ dans cette égalité de deux suites, on trouve $\lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$, ce qui prouve que (u^0, \dots, u^{p-1}) est libre. Soit $v \in \mathbb{E}_p$. Alors $v = v_0 u^0 + \dots + v_{p-1} u^{p-1}$, ce qui prouve que (u^0, \dots, u^{p-1}) engendre \mathbb{E}_p . Ainsi (u^0, \dots, u^{p-1}) est une base de \mathbb{E}_p . On en déduit que $\dim \mathbb{E}_p = p$.

(c) E_2 et E_4 sont tous deux des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De plus, une suite 2-périodique est évidemment 4-périodique donc $E_2 \subset E_4$. Ainsi E_2 est un sous-espace vectoriel de E_4 .

(d) Soit $u \in F$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = -u_{n+2} = u_n$ donc $u \in E_4$. Ainsi $F \subset E_4$. De plus, F contient la suite nulle et est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E_4 . On montre d'abord que (x, y) est libre. Soit alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda x + \mu y = 0$. Notamment $\lambda x_0 + \mu y_0 = 0$ et $\lambda x_1 + \mu y_1 = 0$. On en déduit que $\lambda = \mu = 0$. La famille (x, y) est donc libre. Puisque $F = \text{Vect}(x, y)$, (x, y) est une base de F . Par conséquent, $\dim F = 2$. On en déduit que $\dim E_4 = \dim F + \dim E_2$. Il ne reste plus qu'à montrer que $F \cap E_2 = \{0\}$ pour affirmer que F est un supplémentaire de E_2 dans E_4 . Soit alors $u \in F \cap E_2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -u_{n+2} = -u_n$ i.e. $u_n = 0$. On a donc bien $F \cap E_2 = \{0\}$ puis $E_4 = F \oplus E_2$.