

## ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Dans toute la suite,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

► **Calculs de dimension**

1. Soit  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ; démontrer que  $(1, \omega)$  est une base de  $\mathbb{C}$  vu comme  $\mathbb{R}$ -e.v.
2. Démontrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est un espace vectoriel de dimension finie. En déterminer une base.
3. Déterminer la dimension de l'espace engendré par  $(\exp, \cos, \sin)$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .
4. Déterminer dans  $\mathbb{R}^4$  le rang des familles suivantes :
  - (a)  $(x_1, x_2, x_3)$ , où  $x_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $x_2 = (1, -1, 1, -1)$  et  $x_3 = (1, 0, 1, 1)$ ;
  - (b)  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , où  $x_1 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $x_2 = (1, -1, 1, 0)$ ,  $x_3 = (2, 0, 1, 1)$  et  $x_4 = (0, 2, -1, 1)$ ;
  - (c)  $(x_1, x_2, x_3)$ , où  $x_1 = (1, 0, 2, 3)$ ,  $x_2 = (1, 1, 1, 1)$  et  $x_3 = (2, 0, 0, 1)$ .
5. Soient  $F$  et  $G$  deux plans vectoriels distincts de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que  $\mathbb{R}^3 = F + G$ . La somme est-elle directe ?
6. On se place dans l'espace  $\mathbb{R}^4$  et on pose
 
$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid z = t = 0\}$$
 et  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 2x - y + 3z - 4t = 0\}$ .
  - (a) Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires. Déterminer une base de  $\mathbb{R}^4$  adaptée à cette décomposition en somme directe.
  - (b) Calculer la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  d'un vecteur  $(x, y, z, t)$  de  $\mathbb{R}^4$ .
7. Pour  $x \in ]-1, 1[$  on pose :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{et} \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Déterminer le rang de la famille  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  dans l'espace  $\mathbb{R}^{]-1,1[}$ .

8. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0$  et  $u^{p-1} \neq 0$  (on dit que  $u$  est *nilpotent*).
  - (a) Donner un exemple de tel endomorphisme.
  - (b) Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  soit libre.
  - (c) Que peut-on en déduire quant à la dimension de  $E$  ?

► **Théorème du rang**

9. Soit  $E$   $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie non nulle et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - (i)  $\ker(f) = \ker(f^2)$ ;
  - (ii)  $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ ;
  - (iii)  $E = \text{Im}(f) + \ker(f)$ ;
  - (iv)  $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ .
10. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
  - (a) Vérifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a les inclusions :
 
$$\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^k) \supset \text{Im}(u^{k+1}).$$
  - (b) Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$  et que
 
$$\forall k \geq p, \quad \ker(u^k) = \ker(u^p) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^k) = \text{Im}(u^p).$$
11. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u \circ v \circ u = u$  et  $v \circ u \circ v = v$ .
  - (a) Démontrer que  $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(v)$ .
  - (b) Montrer que  $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$ .
12. Soient  $E, F$  et  $G$  des  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie. Démontrer que si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$  on a :

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u) - \dim(\text{Im}(u) \cap \ker(v)).$$

13. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie  $n$  et soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Démontrer que :
- $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - n \leq \operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$ ;
  - $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$ .
14. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie paire  $n = 2p$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Démontrer que :

$$((f^2 = 0) \text{ et } (\operatorname{rg}(f) = p)) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(f) = \ker(f)).$$

15. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie  $n$  et soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u + v = \operatorname{id}_E$  et  $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leq n$ .
- Démontrer que  $E = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Im}(v)$ .
  - En déduire que  $u$  et  $v$  sont des projecteurs et que  $u \circ v = v \circ u = 0$ .

## ► Formes linéaires et hyperplans

16. Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ .
- Vérifier que  $n \geq 2$ .
  - Montrer que  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$ .
17. On pose  $e_1 = (1, 0, 1)$  et  $e_2 = (0, 1, 0)$  dans  $\mathbb{K}^3$ .
- Calculer le rang de la famille  $(e_1, e_2)$  et la compléter en une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{K}^3$ .
  - Déterminer les formes linéaires coordonnées relatives à  $\mathcal{B}$ .
18. On considère les formes linéaires suivantes sur  $\mathbb{R}^3$  :  $\varphi_1 : (x, y, z) \mapsto y + z$ ,  $\varphi_2 : (x, y, z) \mapsto 2x + 3y - z$  et  $\varphi_3 : (x, y, z) \mapsto 8y$ .
- Exprimer  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  comme combinaison linéaire des formes linéaires coordonnées relatives à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
  - Déterminer le rang de la famille  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ .

## ► Approfondissements

19. Soient  $x_0, \dots, x_n \in [0, 1]$  des réels vérifiant que  $x_0 = 0$ ,  $x_n = 1$  et  $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $x_i < x_{i+1}$ . Démontrer que l'ensemble  $E$  des fonctions à valeurs réelles dont la restriction à chaque segment  $[x_i, x_{i+1}]$  est affine est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer  $\dim(E)$ .
20. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Déterminer une CNS sur  $u$  pour qu'il existe  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u \circ v = 0$  et  $u + v \in GL(E)$ .
21. Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $E_p$  l'ensemble des suites réelles  $p$ -périodiques.
- Montrer que  $E_p$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
  - Pour  $0 \leq k \leq p-1$ , on définit la suite  $u^k$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k[p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $(u^0, u^1, \dots, u^{p-1})$  est une base de  $E_p$ . Que peut-on en déduire quant à la dimension de  $E_p$  ?

- Justifier que  $E_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E_4$ .
- On note  $F$  l'ensemble des suites  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} + u_n = 0$ . Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E_4$  et un supplémentaire de  $E_2$  dans  $E_4$ .

## ► Exercices CCINP

55] Soit  $a$  un nombre complexe. On note  $E$  l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$$

avec  $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ .

1. (a) Prouver que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
- (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de  $E$ .
2. Dans cette question, on considère la suite de  $E$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$ . Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ , le nombre complexe  $u_n$  en fonction de  $n$ .

*Indication* : discuter suivant les valeurs de  $a$ .

60] Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par :  $f(M) = AM$ .

1. Déterminer une base de  $\text{Ker } f$ .
2.  $f$  est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de  $\text{Im } f$ .
4. A-t-on  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  ?

62] Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$ .

1. Prouver que  $f$  est bijectif et exprimer  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .
2. Prouver que  $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ .
3. Dans cette question, on suppose que  $E$  est de dimension finie. Prouver que  $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ .

64] Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ .

1. Démontrer que :  $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$ .
2. (a) Démontrer que :  $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ .
- (b) Démontrer que :  $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ .

72] Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , et soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On suppose que  $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$ , où  $v$  est un vecteur donné de  $E$ .

1. Donner le rang de  $f$ .

87] Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$   $n + 1$  réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si  $b_0, b_1, \dots, b_n$  sont  $n + 1$  réels quelconques, alors il existe un unique polynôme  $P$  vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \{0, \dots, n\} P(a_i) = b_i.$$

2. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Expliciter ce polynôme  $P$ , que l'on notera  $L_k$ , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que  $\forall p \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$ .

90] Soient  $a_1, a_2, a_3$  trois scalaires distincts donnés de  $\mathbb{K}$ .

1. Montrer que  $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$

$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^3$  et on pose  $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$ .

(a) Justifier que  $(L_1, L_2, L_3)$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

(b) Exprimer les polynômes  $L_1, L_2$  et  $L_3$  en fonction de  $a_1, a_2$  et  $a_3$ .

3. Soit  $P \in \mathbb{K}_2[X]$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_1, L_2, L_3)$ .

4. **Application** : on se place dans  $\mathbb{R}^2$  muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points  $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$ . Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points  $A, B$  et  $C$ .