▶ Espaces et sous–espaces vectoriels

1. Les ensembles suivants sont–ils des $\mathbb{K}$–e.v ?
   (a) Oui, par opération sur les limites.
   (b) Non, car les suites $(2n)_n$ et $(2n+(-1)^n)_n$ sont monotones mais pas leur différence.
   (c) La suite nulle est bornée. Soit $(u,v,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$. Il existe des constantes réelles positives K et L telles que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$ et $|v_n| \leq L$. Alors
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda|\,|u_n| + |v_n| \leq |\lambda| K + L\,.$$
   La suite $\lambda u + \mu v$ est donc bornée. On a bien un s–e.v de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
   (d) Oui car il s'agit du noyau de la forme linéaire $(x,y,z,t) \mapsto x+2y-z-2t$.
   (e) Non, car le vecteur nul n'appartient pas à cet ensemble.
   (f) Oui car il s'agit du noyau de $f \mapsto (x \mapsto f'(x)+xf(x))$ qui est un élément de $\mathscr{L}(\mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\mathscr{C}^0(\mathbb{R}))$.
   (g) Non, car le vecteur nul (ici $x \mapsto 0$) n'appartient pas à cet ensemble.
   (h) Oui car il s'agit du noyau de la forme linéaire $f \mapsto f(2)-2f(1)$ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   (i) Non car $1 \in \mathscr{D}$ mais $1+1 \notin \mathscr{D}$.
   (j) Non car $(1,1)$ appartient à l'ensemble mais pas $2\cdot(1,1)$.
2. (a) Comme a et b sont non nuls, $a \in \mathscr{D}_b \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ a = \lambda b$, ce qui est équivalent à $b = \dfrac{1}{\lambda} a \in \mathscr{D}_a$.
   (b) L'équivalence est fausse (sauf si les deux vecteurs sont nuls) car 0 appartient à toutes les droites vectorielles mais $\mathscr{D}_0 = \{0\}$.
3. (a) Oui.
   (b) Non, car il n'est pas stable par multiplication par i.
4. L'application $f : P \mapsto AP$ réalise un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (vérification immédiate) donc $A\mathbb{K}[X] = \mathrm{Im}(f)$ est bien un s–e.v de $\mathbb{K}[X]$.
5. (a) Non car il ne contient pas 0.
   (b) Soient $x \in F$ et $y \notin F$; si on suppose que $x+y \in F$ alors par combinaison linéaire $y = x+y-x \in F$, ce qui est absurde.
   Si $F = E$, il est clair que $\mathrm{Vect}(E \setminus F) = \mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$. Dans le cas où $E \setminus F \neq \emptyset$, on peut fixer $y_0 \in E \setminus F$ et alors pour tout $x \in E$ on a $x = (x+y_0)-y_0$. Soit le terme $x+y_0$ appartient à F, soit il ne lui appartient pas. Si il appartient à F alors d'après le résultat précédent $x \notin F$; sinon alors par combinaison linéaire $x = (x+y_0)-y_0 \in \mathrm{Vect}(E \setminus F)$. Dans les deux cas, on a bien $x \in \mathrm{Vect}(E \setminus F)$ et donc $\mathrm{Vect}(E \setminus F) = E$.
   (c) Montrons que $F \cup G$ est un s.e.v de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. Le sens indirect est trivial car la réunion est alors égale à l'un des deux s–e.v. Le sens direct se démontre par contraposition : si on suppose qu'aucune des deux inclusions n'est vraie, alors il existe deux vecteurs $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Or, d'après la question précédente, $x+y$ ne peut appartenir ni à F, ni à G, ce qui interdit à $F \cup G$ d'être un s–e.v.
6. Si $a = 0$, E est le noyau de la forme linéaire $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ définie sur $\mathbb{K}^n$: c'est donc un s–e.v de $\mathbb{K}^n$. Dans le cas contraire, E ne contient pas $(0,\dots,0)$ donc ne peut être un s–e.v de $\mathbb{K}^n$.
7. (a) Puisque $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} \subset \mathrm{X}, \mathrm{Vect}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{X})$. De même, $\mathrm{Vect}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Y})$ et donc
   $$\mathrm{Vect}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{Vect}(\mathrm{Y})$$
   (b) Dans le cas particulier où $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, posons respectivement $\mathrm{X} = \{(0,1)\}$ et $\mathrm{Y} = \{(0,2)\}$, on a $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \emptyset$ donc
   $$\mathrm{Vect}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) = \{(0,0)\} \neq \{0\} \times \mathbb{R} = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{Vect}(\mathrm{Y})$$

▶ Applications linéaires

8. La vérification de la linéarité est immédiate. Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant $x+y-z=2x-z=0$; en résolvant le système linéaire on obtient $\ker(f)=\mathrm{Vect}((1,1,2))$ et donc f n'est pas injective. Elle est par contre surjective car tout $(X,Y)\in\mathbb{R}^2$ s'écrit sous la forme $(X,Y)=f(0,X-Y,-Y)$.
9. La dérivation étant linéaire, on vérifie aisément que ϕ l'est. Le noyau de ϕ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients constants $y''+\dfrac{b}{a}y'+\dfrac{c}{a}y=0$, qui contient une infinité de fonctions non nulles (*cf.* cours) : l'application φ n'est donc pas injective.
10. Soient $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{K}$ deux à deux distincts ; on considère l'application
$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^n\\ P &\mapsto (P(x_1),\ldots,P(x_n))\end{aligned}\quad .$$
   (a) Immédiat.
   (b) Notons f la restriction de φ à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$; alors $\ker(f)=\{P\in\mathbb{K}[X]\,|\,\forall k\in[\![0,n]\!],P(x_k)=0\}$. Comme les x_k sont deux à deux distincts, la condition de degré impose que $\ker(f)=\{0\}$ au vu du nombre de racines, d'où le résultat.
   (c) D'après un corollaire du lemme de Gauss :
$$\ker(\varphi)=\{P\in\mathbb{K}[X]\ |\,\forall k\in[\![0,n]\!],\,(X-x_k)|P\}=\left\{P\in\mathbb{K}[X]\ \middle|\ \prod_{k=0}^{n}(X-x_k)|P\right\}\ .$$
11. Si on suppose que $v\circ u=0$ alors pour tout $y\in\mathrm{Im}(u)$, comme il existe $x\in E$ tel que $y=u(x)$ alors $v(y)=v(u(x))=0$ donc $(\mathrm{Im}(u)\subset\ker(v))$. Réciproquement, si on suppose $(\mathrm{Im}(u)\subset\ker(v))$ alors pour tout $x\in E$, $v\circ u(x)=v(u(x))=0$ car $u(x)\in\mathrm{Im}(u)$.
12. Démontrons la formule par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$.
   — $n=0$. Trivial car $u^0=\mathrm{id}_E$.
   — Supposons la propriété vraie au rang $n\geq 0$. En composant à gauche par u, on obtient :
$$u^{n+1}\circ v-u\circ v\circ u^n=nu^{n+1}$$
   et en composant à droite par u^n dans l'égalité $u\circ v-v\circ u=u$ on obtient également
$$u\circ v\circ u^n-v\circ u^{n+1}=u^{n+1}\,.$$
   Ainsi, en sommant ces égalités, on aboutit à
$$u^{n+1}\circ v-v\circ u^{n+1}=(n+1)u^{n+1}\,.$$
13. (a) Si $x\in\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E-f)$, alors $(\mathrm{id}_E-f)(x)=0$, donc $x-f(x)=0$, soit $f(x)=x$. Ensuite, si il existe $k\geq 1$ tel que $f^k(x)=x$, alors $f^{k+1}(x)=f^k(f(x))=f^k(x)=x$ et donc on peut terminer par récurrence.
   Par conséquent, $f^k(x)=x$ pour tout entier $k\geq 1$ et en particulier pour $k=n$. Or f^n est l'application nulle, donc $f^n(x)=0$. Ainsi $x=0$, ce qui démontre que le noyau de id_E-f est réduit au vecteur nul, et donc que id_E-f est injective.
   (b) On a, par identité remarquable (id_E et f commutent dans l'anneau $\mathscr{L}(E)$) :
$$(\mathrm{id}_E-f)\circ\left(\mathrm{id}_E+f+f^2+\cdots+f^{n-1}\right)=\mathrm{id}_E-f^n=\mathrm{id}_E$$
   puisque f^n est l'endomorphisme nul. De même,
$$\left(\mathrm{id}_E+f+f^2+\cdots+f^{n-1}\right)\circ(\mathrm{id}_E-f)=\mathrm{id}_E\,.$$
   Ces deux relations montrent que id_E-f est un automorphisme et a pour automorphisme réciproque $\left(\mathrm{id}_E+f+f^2+\cdots+f^{n-1}\right)$.
   (c) On vérifie que l'application réciproque de id_E-f^k est $\mathrm{id}_E+f^k+f^{2k}+\cdots+f^{k(n-1)}$ de façon similaire.

▶ Familles remarquables

14. (a) Cette famille est formée de deux vecteurs non colinéaires donc est libre. Elle n'est pas génératrice car $(0,1,0,0)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

(b) Supposons trouvés $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda(1,2,2,1)+\mu(1,0,1,0)+\nu(1,3,0,0)=0$; on a alors :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\lambda+\mu+\nu&=&0\\2\lambda+3\nu&=&0\\2\lambda+\mu&=&0\\\lambda&=&0\end{array}\right.$$

qui livre rapidement $\lambda=\mu=\nu=0$: la famille considérée est donc libre. Elle n'est par contre par génératrice : en effet si le vecteur $(0,1,0,0)$ était combinaison linéaire des vecteurs de la famille, on aurait $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccc}\lambda+\mu+\nu&=&0\\2\lambda+3\nu&=&1\\2\lambda+\mu&=&0\\\lambda&=&0\end{array}\right.$$

et ce système n'est pas compatible.

(c) Cette famille n'est pas libre car :

$$(1,1,1,1)=(0,0,0,1)+\frac{1}{2}\cdot(0,0,2,0)+(1-\pi)\cdot(1,0,0,0)+(\pi,1,0,0)\,.$$

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ alors :

$$(x,y,z,t)=t\cdot(0,0,0,1)+\frac{z}{2}\cdot(0,0,2,0)+(x-\pi y)\cdot(1,0,0,0)+y\cdot(\pi,1,0,0)+0\cdot(1,1,1,1)$$

donc la famille est génératrice.

(d) Si $t=0$, la famille contient le vecteur nul et donc ne peut être libre. Elle ne sera pas non plus génératrice car le vecteur $(1,0,0,0)$ n'est pas combinaison linéaire des éléments de la famille.

Supposons $t\neq 0$ et fixons $(u,v,w,x)\in\mathbb{R}^4$. Si il existe $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que

$$a(t,0,0,1)+b(0,t^2,0,-t)+c(t,t,t,0)+d(0,0,0,1)=(u,v,w,x)$$

alors on a :

$$\left\{\begin{array}{ccc}at+ct&=&u\\bt^2+ct&=&v\\ct&=&w\\a-bt+d&=&x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}a+c&=&\dfrac{u}{t}\\bt+c&=&\dfrac{v}{t}\\c&=&\dfrac{w}{t}\\a-bt+d&=&x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}a&=&\dfrac{u-w}{t}\\b&=&\dfrac{v-w}{t^2}\\c&=&\dfrac{w}{t}\\d&=&x+\dfrac{v-u}{t}\end{array}\right..$$

Comme ce système admet une unique solution, (u,v,w,x) s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille : on a donc affaire à une base.

15. (a) Non car $1=\cos^2+\sin^2$.

(b) Supposons trouvés $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda f+\mu g+\nu\cos=0$. En évaluant cette égalité en $0,\pi$ et $\dfrac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccc}7\lambda+\mu+\nu&=&0\\7\lambda-\mu&=&0\\7\lambda+\mu-\nu&=&0\end{array}\right.$$

ce qui livre rapidement $\lambda=\mu=\nu=0$: la famille considérée est libre.

(c) Soient $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ des réels deux à deux distincts. Supposons $\lambda_1 f_{a_1}+\dots+\lambda_n f_{a_n}=0$. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, si $\lambda_i\neq 0$ alors $\lambda_1 f_{a_1}+\dots+\lambda_n f_{a_n}$ n'est pas dérivable en a_i alors que la fonction nulle l'est. Nécessairement $\lambda_i=0$ et la famille étudiée est donc libre.

(d) Montrons que toute sous-famille finie à n éléments de $(e_a)_{a\in C}$ est libre. Montrons le par récurrence sur $n \geq 1$.

— $n = 1$ Immédiat.

— *Supposons la propriété vraie au rang* $n \geq 1$. Soient $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et supposons trouvée une famille $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ de réels tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_{a_k} = 0$. En dérivant cette relation on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \lambda_k e_{a_k} = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} 0 &= a_{n+1} \times 0 - 0 \\ &= a_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_{a_k} - \sum_{k=1}^{n+1} a_k \lambda_k e_{a_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \lambda_k e_{a_k} \,. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence et en utilisant le fait que les $a_{n+1} - a_k$ sont non nuls, on obtient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ puis $\lambda_{n+1} = 0$.

16. Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

(a) La famille $((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ Il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires appartenant à ce plan :est composée de deux vecteurs non colinéaires du plan ; elle est donc libre. Elle est de plus génératrice car si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie $x + y + z = 0$ on a :

$$(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, -1) \,.$$

(b) L'équation caractéristique associée à cette EDL d'ordre 2 homogène à coefficients constants est $X^2+2X+2 = 0$, de racines $z_\pm = -1\pm i$. Ainsi, il s'agit de l'espace vectoriel engendré par les deux fonctions non colinéaires $f : t \mapsto e^{-t}\cos(t)$ et $g : t \mapsto e^{-t}\sin(t)$. Une base en est donc (f, g).

(c) Même dynamique que la question précédente, avec cette fois une équation caractéristique donnée par $X^2 + (2-3i)X - (5+i) = 0$, dont les racines sont $z_1 = 1+i$ et $z_2 = -3+2i$. Une base de cet espace est alors donné par les suites géométriques de raisons z_1 et z_2.

17. (a) Il s'agit du noyau de l'application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{n-1})$ définie par

$$f : P \mapsto (P(\pi), P'(\pi), \dots, P^{(n-2)}(\pi)) \,.$$

(b) Soit $P \in E$; alors par formule de Taylor, hypothèse et condition de degré on a

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(\pi)}{k!}(X-\pi)^k = \frac{P^{(n-1)}(\pi)}{(n-1)!}(X-\pi)^{n-1} + \frac{P^{(n)}(\pi)}{n!}(X-\pi)^n \,.$$

Ainsi, E est engendré par la famille $((X-\pi)^{n-1}, (X-\pi)^n)$. Cette famille étant composée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre : c'est une base de E.

18. Supposons trouvés $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$. Alors on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(\sum_{j=1}^{k} e_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \lambda_k e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \lambda_k e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \lambda_k \right) e_j \end{aligned}$$

et donc par liberté de la famille des $(e_j)_j$ on a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=j}^{n} \lambda_k = 0$$

soit $\lambda_n = 0$ et ensuite, par remontée selon j décroissant, la nullité de tous les λ_k.

► Sommes de sous–espaces

19. (a) Il s'agit du noyau de la forme linéaire $(x, y) \mapsto x + y + z$.
    (b) Si $u \in F \cap G$ alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $u = (x, x, x)$ et $x + x + x = 0$. De fait, u est le vecteur nul et donc $F \cap G = \{0\}$. De plus, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a $u = v + w$ avec $v = (x - \alpha, y - \alpha, z - \alpha) \in F$, $w = (\alpha, \alpha, \alpha) \in G$ et $\alpha = \dfrac{x + y + z}{3}$. Ainsi, on a bien $E = F + G$ et donc $E = F \oplus G$.
20. Non : toute droite de $\mathbb{R}^2$ distincte de $\mathrm{Vect}((1, 0))$ lui est supplémentaire.
21. (a) $y \in u(F+G)$ si et seulement si il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $y = u(a+b) = u(a)+u(b)$, ce qui équivaut à $y \in u(F) + u(G)$, d'où le résultat.
    (b) Soit $y \in u(F) \cap u(G)$; alors il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $y = u(a) = u(b)$. Ainsi, $u(b - a) = 0$ et donc par injectivité $a = b$, ce qui entraîne que $a, b \in F \cap G = \{0\}$. *In fine*, $y = u(0) = 0$ d'où le résultat.
    (c) Par question (b), comme u est injective et que F et G sont en somme directe, c'est également le cas de $u(F)$ et $u(G)$. Ensuite, comme u est surjective, $u(E) = E'$; or par question (a) :
    $$u(E) = u(F + G) = u(F) + u(G)$$
    d'où *in fine* $E' = u(F) \oplus u(G)$.
22. Par division euclidienne, tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. Il ne reste donc qu'à vérifier que F et G sont des s–e.v de $\mathbb{K}[X]$. Pour G, cela découle d'un exercice précédent, et pour F c'est du cours ($F = \mathbb{K}_{\deg(Q)-1}[X]$).
23. L'application f est immédiatement linéaire. De plus, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :
    $$f \circ f(x, y) = (x - 2y - 2(-y), -(-y)) = (x, y)$$
    donc f est une symétrie. Il suffit ensuite de remarquer que $f(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow (y = 0)$ et $f(x, y) = -(x, y) \Leftrightarrow (x = y)$ pour préciser qu'il s'agit de la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}((1, 0))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((1, 1))$.

24. On vérifie rapidement que f est linéaire et que $f \circ f = f$. Le noyau de f est alors l'ensemble des vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, y, z) = (x + y + z) \cdot (a, b, c)$, à savoir $\mathrm{Vect}(u)$ (en effet, si $(x, y, z) = \alpha u$ alors par somme des coordonnées α doit être égal à $x + y + z$).
On sait ensuite que $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{id}_E)$. Or, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, y, z)$ si et seulement si $x + y + z = 0$. De fait, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$ (d'après un exercice précédent).
25. Notons P (resp. I) l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires). P et I sont deux ensembles non vides de E (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et clairement stables par combinaison linéaire : ce sont deux sous-espaces vectoriels de E .
Puisque que la seule fonction paire et impaire est la fonction nulle, $P \cap I = \{0\}$. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons
$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$
On a clairement $f = f_p + f_i, f_p \in P$ et $f_i \in I$ donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset P \oplus I$ et puisque l'inclusion réciproque est triviale, $E = I \oplus P$. Le projecteur recherché est donc $f \mapsto f_p$.

► Approfondissements

26. Pour tout x non nul, la liaison de la famille $(x, f(x))$ permet d'écrire $f(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x \in \mathbb{K}$ unique. Soient x, y non nuls.
    — **Cas** (x, y) **liée :** On peut écrire $y = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{K}$ et alors
    $$f(y) = \mu\lambda_x x = \lambda_x y \text{ et } f(y) = \lambda_y y$$
    donc $\lambda_y = \lambda_x$.
    — **Cas** (x, y) **libre :**
    $$f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$
    donc $\lambda_x = \lambda_y$ par identification des scalaires facteurs dans une famille libre. On pose λ la valeur commune des λ_x. On a donc
    $$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, f(x) = \lambda x$$
    et cette relation vaut aussi pour $x = 0_E$. On peut alors conclure $f = \lambda \mathrm{id_E}$.
27. Raisonnons par double inclusion. Comme
$$\mathrm{F} \subset \mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}') \text{ et } \mathrm{F} \subset \mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}')$$
on a
$$\mathrm{F} \subset \left(\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')\right) \cap (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}'))$$
Réciproquement, soit
$$u \in \left(\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')\right) \cap (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}'))$$
Il existe alors f_1, f_2 dans $\mathrm{F}, f' \in \mathrm{G} \cap \mathrm{F}'$ et $g \in \mathrm{G} \cap \mathrm{G}'$ tels que
$$u = f_1 + f' = f_2 + g.$$
On a donc
$$f' - g = f_2 - f_1 \in \mathrm{F}$$
mais aussi $f' - g \in \mathrm{G}$ en tant que somme de deux vecteurs du sev G de E . On a donc
$$f' - g \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \mathrm{F}' \cap \mathrm{G}' \subset \mathrm{G}'$$
d'où $f' \in \mathrm{G}'$ en tant que somme de deux vecteurs du sev G' de E . On a donc
$$f' \in \mathrm{F}' \cap \mathrm{G}' = \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \subset \mathrm{F}$$
et ainsi :
$$u = f_1 + f' \in \mathrm{F}$$
en tant que somme de deux vecteurs du sev F de E . On a donc prouvé que
$$\left(\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{F}')\right) \cap (\mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{G}')) \subset \mathrm{F}$$

28. Raisonnons par double inclusion. Soit $0 \leq k \leq n . \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_k(x) = \cos^k(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^k \\ &= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{\ell} e^{(2k-\ell)ix} \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell} e^{(2\ell-k)ix}\right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{l} g_{2\ell-k}(x) \end{aligned}$$

Les fonctions g_ℓ étant paires, on a

$$f_k \in \operatorname{vect}(g_0, \ldots, g_n)$$

d'où

$$\operatorname{vect}(f_0, \ldots, f_n) \subset \operatorname{vect}(g_0, \ldots, g_n)$$

Réciproquement, soit $0 \leq k \leqslant n . \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g_k(x) = \cos(kx) &= \operatorname{Re}\left(e^{ikx}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left[(\cos(x)+i\sin(x))^k\right] \\ &\operatorname{Re}\left(\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\sin^{\ell}(x) i^{\ell}\cos^{\ell-k}(x)\right) \end{aligned}$$

d'où ,

$$g_k(x) = \sum_{0 \leqslant 2\ell \leqslant k}\binom{k}{2\ell}(-1)^{\ell}\left(1-\cos^2(x)\right)^{\ell}\cos^{k-2\ell}(x)$$

On remarque alors qu'en posant $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{0 \leqslant 2\ell \leqslant k}\binom{k}{2\ell}(-1)^{\ell}\left(1-x^2\right)^{\ell} x^{k-2\ell}$$

P est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à n telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(kx) = \mathrm{P}(\cos(x))$$

On a montré que

$$g_k \in \operatorname{vect}(f_0, \ldots, f_n)$$

d'où

$$\operatorname{vect}(g_0, \ldots, g_n) \subset \operatorname{vect}(f_0, \ldots, f_n)$$

29. (a) Si $g \circ f$ est surjective, alors $\operatorname{Im} g \circ f = \mathrm{E}$. Or $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g \subset \mathrm{E}$ donc $\operatorname{Im} g = \mathrm{E}$ et g est surjective.
    (b) D'après un exercice précédent : $g(\mathrm{E}) = g(\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g) = g(\operatorname{Im} f) + g(\operatorname{Ker} g) = \operatorname{Im} g \circ f + \{0\} = \operatorname{Im} g \circ f$. Or g est surjective donc $g(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$. Ainsi $\operatorname{Im} g \circ f = \mathrm{E}$ et $g \circ f$ est surjective.
30. (a) Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $\mathrm{E} = \mathrm{S} \oplus \operatorname{Im} u$, il existe $(y, t) \in \mathrm{S} \times \operatorname{Im} u$ tel que $x = y + t$. Comme S est un supplémentaire de Ker u, u induit un isomorphisme de S sur Im u. Il existe donc $z \in S$ tel que $t = u(z)$. On obtient donc $x = u + u(t)$. avec $(y, t) \in S^2$.
    Cette écriture est unique. En effet, si $x = y' + u(z')$ avec $(y', z') \in \mathbb{S}^2$,
    on a : $y - y' = u(z' - z) \in \operatorname{Im} u \cap$ S. D'où résultent $y - y' = 0$ et $z' - z \in \operatorname{Ker} u$. Il s'ensuit que $z' - \hat{z} \in \operatorname{Im} u \cap \mathrm{S} = \{0\}$. On a bien $y = y'$ et $z = z'$.

(b) Montrons la linéarité de v et u. Soit x et x' deux vecteurs de E. Écrivons $x = y + u(z)$ et $x' = y' + u\left(z'\right)$ avec $y = w(x) \cdot y' = w\left(x'\right)$, $z = r(x), z' = v\left(x'\right)$ .Si $\lambda \in \mathrm{K}$, on obtient

$$x + \lambda x' = y + u(z) + \lambda\left(y' + u\left(z'\right)\right) = \underbrace{y + \lambda y'}_{\in S} + u(\underbrace{z + \lambda z'}_{\in S})$$

puis, par unicité de l'écriture,

$$w\left(x + \lambda x'\right) = y + \lambda y' = w(x) + \lambda w\left(x'\right), \quad v\left(x + \lambda x'\right) = z + \lambda z' = v(x) + \lambda v\left(x'\right)$$

Les applications v et w sont donc linéaires. On écrit $x = y + u(z)$ avec $(y, z) \in \mathrm{S}^2$ et on calcule $(u \circ v + vou)(x)$. On obtient

$$\begin{aligned}(u \circ v + v \circ u)(x) &= u(z) + v(u(x)) = u(z) + v(u(y)), \text{ cas } u(z) \in \operatorname{Ker} u \\ &= u(z) + y = x, \text{ par définition de } v(y \in \text{ S})\end{aligned}$$

Or conclut que $u \circ v + vou = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

(c) On calcule de même $(u \circ w + w \circ u)(x)$ et on obtient

$$\begin{aligned}(u \circ w + w \circ u)(x) &= u(y) + u(u(x)) = u(y) + w(u(y)) \\ &= u(y) + 0, \text{ par définition de } w) \\ &= u(x - u(z)) = u(x). \text{ car } u(z) \in \text{ Ker } u\end{aligned}$$

On conclut que $u \circ w + w \circ u = u$.