

ESPACES VECTORIELS

Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

► Espaces et sous-espaces vectoriels

- Les ensembles suivants sont-ils des \mathbb{K} -e.v ?

(a) L'ensemble des suites convergentes d'éléments de \mathbb{K} ;	(f) l'ensemble des solutions de $y' + xy = 0$;
(b) l'ensemble des suites monotones d'éléments de \mathbb{K} ;	(g) l'ensemble des solutions de $y' + xy = x^2$;
(c) l'ensemble des suites bornées d'éléments de \mathbb{K} ;	(h) l'ensemble $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(2) = 2f(1)\}$;
(d) l'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = z + 2t\}$;	(i) l'ensemble $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 1\}$;
(e) l'ensemble $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = z + 2t - 1\}$;	(j) la courbe représentative de $x \mapsto x^2$.
- Soit E un \mathbb{K} -e.v et soient $a, b \in E \setminus \{0\}$.
 - Démontrer que $(a \in \mathcal{D}_b) \Leftrightarrow (b \in \mathcal{D}_a)$.
 - Que dire si a ou b est égal à 0 ?
- \mathbb{R} est-il un s.e.v du \mathbb{R} -e.v \mathbb{C} ?
 - \mathbb{R} est-il un s.e.v du \mathbb{C} -e.v \mathbb{C} ?
- Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que l'ensemble $A\mathbb{K}[X]$ des multiples de A est un s.e.v de $\mathbb{K}[X]$.
- Soit E un \mathbb{K} -e.v et soient F, G deux s.e.v de E .
 - $E \setminus F$ est-il un s.e.v de E ?
 - Soient $x \in F$ et $y \notin F$; démontrer que $x + y \notin F$. Expliciter alors le sous-espace $\text{Vect}(E \setminus F)$.
 - En déduire une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour que leur réunion $F \cup G$ soit un s.e.v de E .
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur le scalaire $a \in \mathbb{K}$ pour que l'ensemble

$$E = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = a \right\}$$

soit un \mathbb{K} -e.v.

- Soit E un \mathbb{K} -e.v et soient X, Y deux parties de E .
 - Montrer que

$$\text{Vect}(X \cap Y) \subset \text{Vect}(X) \cap \text{Vect}(Y).$$
 - Que dire de l'inclusion réciproque ?

► Applications linéaires

- Vérifier que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y - z, 2x - z) \end{aligned}$$

est linéaire et déterminer son noyau. Est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto af'' + bf' + cf \end{aligned}$$

est linéaire et déterminer son noyau. Est-elle injective ?

- Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts; on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P &\mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n)) \quad . \end{aligned}$$

- (a) Justifier que φ est linéaire.
 (b) Démontrer que la restriction de φ à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est injective.
 (c) Déterminer le noyau de φ .
11. Soient E, F, G trois \mathbb{K} -e.v et soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que

$$(v \circ u = 0) \Leftrightarrow (\text{Im}(u) \subset \ker(v)) .$$

12. Soit E un \mathbb{K} -e.v et soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$. Démontrer que pour tout $n \geq 0$ on a $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^n$.
13. Soit E un \mathbb{K} -e.v et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $f^n = 0$ (on dira que f est *nilpotente*).
- (a) Soit $x \in \ker(\text{id}_E - f)$. Démontrer que $f^k(x) = x$ pour tout entier $k \geq 1$. En déduire que $\text{id}_E - f$ est injectif.
- (b) Simplifier les expressions
- $$(\text{id}_E - f) \circ (\text{id}_E + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \quad \text{et} \quad (\text{id}_E + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \circ (\text{id}_E - f)$$
- et en déduire que $\text{id}_E - f$ est un automorphisme.
- (c) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$, l'endomorphisme $\text{id}_E - f^k$ est inversible. On précisera l'expression de son inverse.

► Familles remarquables

14. Les familles suivantes sont-elles libres dans \mathbb{R}^4 ? Génératrices ?
- (a) $((1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1))$;
 (b) $((1, 2, 2, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 0))$;
 (c) $((0, 0, 0, 1), (0, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 0), (\pi, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1))$;
 (d) $((t, 0, 0, 1), (0, t^2, 0, -t), (t, t, t, 0), (0, 0, 0, 1))$, pour $t \in \mathbb{R}$.
15. Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
- (a) $(1, \sin, \cos, \sin^2, \cos^2)$;
 (b) (f, g, \cos) , où $f : x \mapsto 7$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$;
 (c) $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$, où $f_\alpha : x \mapsto |x - \alpha|$;
 (d) $(e_a)_{a \in \mathbb{R}}$, où $e_a : x \mapsto e^{ax}$.
16. Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :
- (a) le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x + y + z = 0$;
 (b) le \mathbb{R} -e.v des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$;
 (c) le \mathbb{C} -e.v des suites (u_n) à valeurs complexes vérifiant $u_{n+2} + (2 - 3i)u_{n+1} - (5 + i)u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
17. On considère l'ensemble suivant, pour $n \geq 2$:

$$E = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid \forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, P^{(k)}(\pi) = 0\} .$$

- (a) Montrer que E est un \mathbb{K} -e.v.
 (b) Déterminer une base de E .
18. Soit E un \mathbb{K} -e.v, $n \in \mathbb{N}^*$ et (e_1, \dots, e_n) une famille libre de E . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$u_k = \sum_{j=1}^k e_j .$$

Démontrer que la famille (u_1, \dots, u_n) est libre.

► Sommes de sous-espaces

19. On considère les deux sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^3 :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

- (a) Démontrer que F est un s.e.v de \mathbb{R}^3 .
 (b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
20. Soit E un \mathbb{K} -e.v et soit F un s.e.v de E . On suppose qu'il existe un s.e.v G de E tel que $E = F \oplus G$; G est-il unique ?
21. Soient E et E' deux \mathbb{K} -e.v et $u \in \mathcal{L}(E, E')$. On fixe F et G deux s.e.v de E .
- (a) Justifier que $u(F + G) = u(F) + u(G)$.
 (b) Démontrer que si F et G sont en somme directe et que u est injective, alors $u(F)$ et $u(G)$ sont en somme directe.
 (c) Montrer que si $E = F \oplus G$ et $u \in GL(E, E')$, alors $E' = u(F) \oplus u(G)$.
22. Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On pose

$$F = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(Q) < \deg(P)\} \quad \text{et} \quad G = P\mathbb{K}[X].$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

23. Déterminer la nature de l'application définie sur \mathbb{R}^2 par $f : (x, y) \mapsto (x - 2y, -y)$.
 24. Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $abc \neq 0$ et $a + b + c = 1$. On pose ensuite :

$$f : (x, y, z) \mapsto (x, y, z) - (x + y + z)u.$$

Démontrer que f est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

25. Déterminer, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, le projecteur sur l'ensemble des fonctions paires parallèlement à celui des fonctions impaires. On vérifiera bien sur que les ensembles cités sont des espaces vectoriels.

► Approfondissements

26. *Lemme de Schur.* Soit E un \mathbb{K} -e.v et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ soit liée. Démontrer que f est une homothétie.
 27. Soient F, G, F' et G' quatre sev d'un \mathbb{K} -e.v E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Démontrer que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F.$$

28. On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \cos^n(x) \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \cos(nx).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\text{Vect}(\{f_k \mid 0 \leq k \leq n\}) = \text{Vect}(\{g_k \mid 0 \leq k \leq n\}).$$

29. Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -e.v E .
- (a) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
 (b) Montrer que si g est surjective et $E = \text{Im}(f) + \ker(g)$, alors $g \circ f$ est surjective.
30. Soit E un \mathbb{K} -e.v, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(u) = \text{Im}(u)$ et S un supplémentaire de $\text{Im}(u)$.
- (a) Montrer que, pour tout $a \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in S^2$ tel que $x = y + u(z)$.
 On pose alors $z = v(x)$ et $y = w(x)$.
 (b) Montrer que v est linéaire et calculer $u \circ v + v \circ u$.
 (c) Montrer que w est linéaire et calculer $u \circ w + w \circ u$.

► Exercices CCINP

55 Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n$$

avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .
Indication : discuter suivant les valeurs de a .

62 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

85 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

(a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.

(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$.

2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

90 Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de \mathbb{K} .

1. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3$

$$P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{K}^3 et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

(a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

(b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .

4. **Application** : on se place dans \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .