

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

► Développements limités et asymptotiques

1. *Enoncé* : Effectuer un développement limité à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto \ln(1 + \cos(2x))$;

$$\ln(2) - x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

(b) $x \mapsto \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)$;

$$\frac{\pi}{6} + \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^2}{6\sqrt{3}} + \frac{x^3}{9\sqrt{3}} + \frac{7x^4}{108\sqrt{3}} + o(x^4)$$

(DL de la dérivée puis primitive);

(c) $x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$;

$$\sqrt{2} + \frac{x}{4\sqrt{2}} - \frac{5x^2}{64\sqrt{2}} + \frac{21x^3}{512\sqrt{2}} - \frac{429x^4}{16384\sqrt{2}} + o(x^4)$$

(d) $x \mapsto \ln(\sqrt{1+x})$;

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

(reconnaître $\frac{1}{2} \ln(1+x)$)

(e) $x \mapsto \frac{1+x-e^x \cos(x)}{x-\ln(1+x)}$;

$$\frac{2x}{3} + \frac{7x^2}{9} + \frac{34x^3}{135} + \frac{37x^4}{810} + o(x^4)$$

(f) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sin(3x)}$;

$$\frac{1}{3} + \frac{4x^2}{9} + \frac{4x^4}{9} + o(x^4)$$

(g) $x \mapsto e^{\sin(x)}$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

(h) $x \mapsto \frac{2x+x^2}{\ln(1+x)}$;

$$2 + 2x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{90} + o(x^4)$$

(i) $x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$;

$$1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4)$$

(j) $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}$;

$$x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{25x^4}{12} + o(x^4)$$

(k) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

$$e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} - \frac{7ex^3}{16} + \frac{2447ex^4}{5760} + o(x^4)$$

(passer sous forme exponentielle)

(l) $x \mapsto \sin(x)(\operatorname{ch}(x) - 1)$.

$$\frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

2. *Enoncé : Effectuer un développement limité des expressions suivantes à l'ordre et au voisinage du point indiqués :*

(a) à l'ordre 2 , en 1 : $x \mapsto \frac{\ln(2-x)}{x^2}$;

$$-(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

(b) à l'ordre 2 , en $\frac{\pi}{3}$: $x \mapsto \sin(\pi \cos(x))$;

$$1 - \frac{3}{8}\pi^2 \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)$$

(c) à l'ordre 3 , en $\frac{\pi}{4}$: $x \mapsto \tan(x)$;

$$1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

(d) à l'ordre 7 , en $\frac{\pi}{2}$: $x \mapsto \cos(\pi \sin(x))$.

$$-1 + \frac{1}{8}\pi^2 \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{1}{48}\pi^2 \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7\right)$$

3. *Enoncé : Déterminer un développement asymptotique à la précision et au voisinage indiqués des fonctions suivantes :*

(a) à la précision x^2 , en 0 : $x \mapsto \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)\right)} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{120} + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o_{x \rightarrow 0} \right) \\ &= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{720}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2). \end{aligned}$$

(b) à la précision $\frac{1}{x^5}$, en $+\infty : x \mapsto \frac{\sin(1/x)}{x+1}$;

Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x+1}$, en $+\infty$ à l'ordre 5, revient à le faire, en 0 à l'ordre 5, pour l'application g définie par $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t \sin(t)}{1+t}$. Or $t \sin(t) = t^2 - \frac{t^4}{6} + \mathcal{O}(t^6)$ et $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \mathcal{O}(t^4)$. D'où $g(t) = t^2 - t^3 + \frac{5}{6}t^4 - \frac{5}{6}t^5 + \mathcal{O}(t^6)$, puis $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} - \frac{5}{6x^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^6}\right)$.

(c) à la précision $\frac{1}{x^3}$, en $+\infty : x \mapsto x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$;

On a : $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x) = -\ln(x) + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\ln(x) + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

(d) à la précision $\frac{e^x}{x^2}$, en $+\infty : x \mapsto \left(\frac{1}{x} + 1\right)^{x^2}$.

On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} + 1\right)^{x^2} &= \exp\left(x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \exp\left(x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)\right) \\ &= e^x e^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{4x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \left(e^x + \frac{e^x}{3x} - \frac{7e^x}{36x^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) \end{aligned}$$

4. Énoncé :

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^n x^k\right).$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

donc pour x au voisinage de 0

$$\ln\left(\sum_{k=0}^n x^k\right) = \ln(1 - x^{n+1}) - \ln(1 - x)$$

Or $\ln(1 - x^{n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^{n+1}$ donc $\ln(1 - x^{n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$ et

$$\ln(1 - x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

donc

$$\ln\left(\sum_{k=0}^n x^k\right) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \ln \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right).$$

On sait que

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \ln \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) &= \ln \left(e^x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - e^x \right) \\ &= x + \ln \left(1 + e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - e^x \right) \right) \end{aligned}$$

Or d'après ce qui précède,

$$e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - e^x \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!}$$

Puisque $n \geq 1$,

$$e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - e^x \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

et donc

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - e^x \right) \right) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^n}{n!} \\ &= -\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\ln \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) = x - \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

(c) Déterminer le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de

$$x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2/2} dt$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est continue sur \mathbb{R} donc $\int_x^{x^2} e^{-t^2/2} dt$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t=0}{=} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + o(t^5)$$

Comme $x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est une primitive de $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$, on obtient en intégrant terme à terme :

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + o(x^6)$$

Par conséquent,

$$\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{40} + o(x^{12})$$

et a fortiori

$$\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

D'après la relation de Chasles, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On en déduit que

$$\int_x^{x^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

► Suites numériques

5. *Énoncé : Donner un équivalent simple des suites suivantes (données pour $n \geq 2$) et en déduire leur limite :*

(a) $u_n = n^2 \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$;

Posons :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = n^2 \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Donc :

$$u_n = n^2 \left(\frac{2}{(n-1)(n+1)} \right) \sim n^2 \times \frac{2}{n^2} = 2$$

Donc :

$$u_n \sim 2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2$$

(b) $v_n = n \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) + 1$;

Posons :

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = n \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) + 1$$

Donc :

$$v_n = n \ln \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) + 1 = -n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + 1 \sim -n \left(\frac{1}{n} \right) + 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

(c) $w_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$.

Posons :

$$w_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

Or :

$$\begin{aligned} -n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= -n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Donc :

$$w_n \sim e^{-\sqrt{n} + \frac{1}{2}}$$

6. *Énoncé* : Soit u une suite convergeant vers 0 . Déterminer la limite éventuelle des suites de termes généraux suivants :

(a) $\frac{\ln(1+u_n)}{\sin(u_n)}$;

On a $u_n \rightarrow 0$ donc :

$$\begin{cases} \ln(1 + u_n) \sim u_n \\ \sin(u_n) \sim u_n \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{\ln(1 + u_n)}{\sin(u_n)} \sim \frac{u_n}{u_n} = 1 \rightarrow 1$$

Donc la limite est 1.

(b) $\frac{1-e^{u_n}}{u_n^3+u_n^4}$;

On a $1 - e^{u_n} \sim -(e^{u_n} - 1) \sim -u_n$ et $u_n^3 + u_n^4 \sim u_n^3$. Donc :

$$\frac{1 - e^{u_n}}{u_n^3 + u_n^4} \sim \frac{-u_n}{u_n^3} = -\frac{1}{u_n^2} \rightarrow -\infty$$

Donc la limite est $-\infty$.

(c) $\left(\sqrt[3]{1+u_n^2}\right)^5$.

$$\left(\sqrt[3]{1+u_n^2}\right)^5 = \left(1+u_n^2\right)^{\frac{5}{3}} \sim 1 + \frac{5}{3}u_n^2 \rightarrow 1$$

Donc la limite est 1.

7. *Énoncé* : Soit $a > 0$; déterminer un équivalent simple de la suite de terme général $a^{a+\frac{1}{n}} - \left(a + \frac{1}{n}\right)^a$.

Soit $a > 0$

On a d'un coté :

$$\begin{aligned} a^{a+\frac{1}{n}} &= a^a e^{\frac{1}{n} \ln(a)} \\ &= a^a \left(1 + \frac{1}{n} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

De l'autre coté :

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{n}\right)^a &= e^{a \ln\left(a + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{a\left(\ln(a) + \frac{1}{na} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{a \ln(a) + 1/n + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= a^a e^{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= a^a \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$a^{a+\frac{1}{n}} - \left(a + \frac{1}{n}\right)^a = a^a \left(\frac{1}{n} \ln(a) - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Donc l'équivalent est :

$$a^{a+\frac{1}{n}} - \left(a + \frac{1}{n}\right)^a \sim \frac{a^a(\ln(a) - 1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

8. *Enoncé* : Soit u une suite convergant vers 1 ; déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général $\frac{u_n^{u_n} - u_n}{\ln(u_n)}$.

Posons :

$$h_n = u_n - 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{u_n} - u_n}{\ln(u_n)} &= \frac{(1 + h_n)^{1+h_n} - (1 + h_n)}{\ln(1 + h_n)} \\ &\sim \frac{(1 + h_n)h_n^2 + o(h_n^2)}{h_n} \\ &= h_n(1 + h_n) + o(1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

9. *Enoncé* : Établir que $\int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}$.

Posons :

$$I_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2}$$

Posons $u = \frac{1}{t}$, donc $du = -\frac{1}{t^2} dt$.

C'est à dire $t = \frac{1}{u}$ et donc : $dt = -t^2 du$.

Donc :

$$I_n = \int_{1/n^2}^{1/n^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{u^2}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = - \int_{1/n^2}^{1/n^3} \frac{1}{1 + u^2} du = \arctan(1/n^2) - \arctan(1/n^3) \sim \frac{1}{n^2}$$

► Études de fonctions

10. *Enoncé* : Déterminer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{1 - 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$;

Un quotient d'équivalents amène que la quantité étudiée est équivalente en 0 à $6x$ et donc de limite nulle en ce point.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) - x \tan(x)}{\sin^3(x)}$;

Il n'y a pas de forme indéterminée.

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$;

On se ramène en 0 en effectuant le changement de variable $x = 1 + h$. Occupons nous du numérateur :

$$e^{x^2+x} - e^{2x} = e^{2+3h+h^2} - e^{2+2h} = e^{2+2h} (e^{h+h^2} - 1) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} e^2 (h + h^2) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} e^2 h$$

Maintenant le dénominateur :

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi h}{2}$$

Par quotient, la limite recherchée est $-\frac{2e^2}{\pi}$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}$;

Posons $x = 1 + h$ et notons $g(x)$ l'expression de l'énoncé. On a

$$g(x) = \frac{1+h}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(1+h)} &= \frac{1}{h(1 - h/2 + o(h))} = \frac{1 + h/2 + o(h)}{h} \\ &= \frac{1}{h} + o(1) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1+h}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)} = 1 - \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2} + o(1)$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{2}$$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)}$;

En passant par la forme exponentielle, on trouve e .

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))}$;

$$x - \tan(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{3}x^3$$

d'où

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} = -\infty$$

11. *Énoncé : Donner un équivalent en 0 des fonctions suivantes :*

(a) $x \mapsto \ln\left(\frac{e^x+1}{2}\right) - \frac{4x+x^2}{8}$;

On a au voisinage de 0,

$$\frac{e^x + 1}{2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4)$$

de plus,

$$\ln(1+u) \underset{0}{\equiv} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + o(u^4)$$

Posons

$$u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{48}x^4$$

et appliquons le théorème de composition des DL. D'où

$$f(x) = -\frac{1}{192}x^4 + o(x^4)$$

et donc

$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{192}x^4$$

(b) $x \mapsto \sin(\operatorname{sh}(x)) - \operatorname{sh}(\sin(x))$;

On a au voisinage de 0 ,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$$

et

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$$

Posons

$$y = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}$$

et appliquons le théorème de composition des DL, en posant

$$u = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

ainsi,

$$\sin(\operatorname{sh}(x)) - \operatorname{sh}(\sin(x)) = -\frac{1}{90}x^7 + o(x^7)$$

et donc

$$\sin(\operatorname{sh}(x)) - \operatorname{sh}(\sin(x)) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{90}x^7$$

(c) $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Par produit, $\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{\sim} x$.

12. *Énoncé : Déterminer les éventuelles asymptotes aux courbes des fonctions suivantes, ainsi que leur position relativement à ces dernières :*

(a) $f : x \mapsto \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x+2}$;

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(1/x^3)\right)}{x+2} \\ &= \frac{x^2 + x + \frac{1}{2} + o(1/x)}{x+2}. \end{aligned}$$

En effectuant la division euclidienne (ou la décomposition en éléments simples) :

$$\frac{x^2 + x + \frac{1}{2}}{x+2} = x - 1 + \frac{5}{2(x+2)}.$$

Donc la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ et elle est située au-dessus de cette asymptote.

(b) $g : x \mapsto x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$;

$$\begin{aligned} g(x) &= x \arctan\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \\ &= x \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2(x-1)} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(x-1)} + o(1). \end{aligned}$$

D'où, lorsque $x \rightarrow \pm\infty$,

$$g(x) - \left(\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow 0.$$

Asymptote oblique : $y = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}$.

Pour $x \rightarrow +\infty$ le terme $\frac{1}{2(x-1)} > 0$: la courbe est *au-dessus* de l'asymptote ; pour $x \rightarrow -\infty$ le terme est négatif : la courbe passe *au-dessous*.

(c) $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.

$$\begin{aligned} h(x) &= |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= |x| \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty & : h(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + o(1/x), \\ x \rightarrow -\infty & : h(x) = -x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2|x|} + o(1/|x|). \end{cases}$$

D'où les deux asymptotes obliques :

$$\boxed{y = x + \frac{1}{2} \quad (x \rightarrow +\infty)}, \quad \boxed{y = -x - \frac{1}{2} \quad (x \rightarrow -\infty)}.$$

Dans les deux cas le reste est $+\frac{1}{2|x|}$, donc la courbe reste *au-dessus* de son asymptote.

13. *Énoncé* : Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) *Démontrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.*

Fixons $n \in \mathbb{N}$

Posons :

$$I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$$

On sait que \tan est continue sur I_n .

Posons $g : x \mapsto \tan(x) - x$

g est dérivable sur I_n par fonction usuelle et $g' : x \mapsto 1 + \tan^2(x) - 1$

Donc $g' > 0$ sur I_n

Donc g strictement croissante sur I_n .

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow n\pi - \frac{\pi}{2}} -\infty$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}} +\infty$$

[“TVI aux limites”]

Donc, $\exists x_n \in I_n$ tq $g(x_n) = 0$

i.e. $\tan(x_n) = x_n$

- (b) *On pose, pour $n \geq 0$, $u_n = x_n - n\pi$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \arctan(x_n)$ et en déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite que l'on précisera.*

$$v_n = x_n - n\pi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

donc $\arctan(\tan(v_n)) = v_n$

Or,

$$\begin{aligned} \tan(v_n) &= \tan(x_n - n\pi) \\ &= \tan(x_n) \quad \text{par périodicité} \\ &= x_n \quad \text{par (a)} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{v_n = \arctan(x_n)}$$

$$\forall n \geq 0, \quad n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n$$

donc par minoration $x_n \rightarrow +\infty$

par composée $v_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$

(c) Donner un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n}$ de la suite $(x_n)_n$.

$$v_n - \frac{\pi}{2} = \arctan(x_n) - \frac{\pi}{2}$$

Or, $\forall x > 0$,

$$\frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1/x^2}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

donc $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante sur \mathbb{R}^+

En $x = 1$, la constante vaut :

$$\arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

Donc, $\forall n \geq 0$:

$$v_n - \frac{\pi}{2} = -\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = -\frac{1}{x_n} + o\left(\frac{1}{x_n}\right) \sim -\frac{1}{x_n}$$

Or, $\forall n \geq 1$, on a l'encadrement :

$$n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x_n \sim n\pi}$$

Donc :

$$-\frac{1}{x_n} \sim -\frac{1}{n\pi} \Rightarrow -\frac{1}{x_n} = -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{v_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Enfin :

$$x_n = v_n + n\pi = \boxed{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

14. *Enoncé* : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction

$$f : x \mapsto \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3} \right)^x$$

En posant $t = 1/x$ on a :

$$f(x) = \frac{a^t + b^t + c^t}{3} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} 1 + \frac{\ln(abc)}{3}t + o(t)$$

d'où

$$\ln(f(1/t)) \underset{0^+}{=} \ln(\sqrt[3]{abc}) + o(1)$$

Donc, par continuité de l'exponentielle en $\ln(\sqrt[3]{abc})$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt[3]{abc}$$

15. *Enoncé* : On considère la fonction $f : x \mapsto x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur \mathbb{R}^* .

(a) *Démontrer que f se prolonge en une fonction g dérivable sur \mathbb{R} . Ce prolongement est-il deux fois dérivable en 0 ?*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + x^3 \sin \frac{1}{x}\right) = 0$$

puisque $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$ et $x^3 = o(x)$. On pose donc

$$g(x) = \begin{cases} x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Dérivabilité en 0. Pour $h \neq 0$:

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = 1 + h^2 \sin \frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 1$. Pour $x \neq 0$ on dérive classiquement :

$$g'(x) = 1 + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}.$$

Comme $3x^2 \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $x \cos \frac{1}{x} \rightarrow 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 1$, cohérent avec $g'(0)$.

Deuxième dérivée en 0 ? Pour $x \neq 0$,

$$g''(x) = 6x \sin \frac{1}{x} - 4 \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

Le terme $-\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite finie quand $x \rightarrow 0$ (Poser deux suites et montrer par CSL). Par conséquent $g''(0)$ n'existe pas : le prolongement est \mathcal{C}^1 mais pas \mathcal{C}^2 en 0 .

(b) *Montrer que f admet un DL d'ordre 2 en 0 . Que conclure ?*

Pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = x + x^3 \sin \frac{1}{x} = x + o(x^2),$$

car $x^3 \sin \frac{1}{x} = o(x^2)$. On dispose donc d'un DL d'ordre 2 :

$$f(x) = x + o(x^2).$$

On en conclut à nouveau que g est dérivable en 0 (le terme en x est bien déterminé) mais qu'aucun terme en x^2 n'est défini : l'existence d'un DL d'ordre 2 n'implique pas la dérivabilité seconde, ce qui confirme la réponse précédente.

16. *Enoncé* : On s'intéresse à la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{e^{x^2}-1}{x}$ sur \mathbb{R}^* .

(a) Vérifier que f se prolonge en une fonction g dérivable sur \mathbb{R} .

Le développement de e^{x^2} donne

$$e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2} + O(x^6),$$

donc

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x} = x + \frac{x^3}{2} + O(x^5).$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; on pose

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $h \neq 0$,

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{e^{h^2} - 1}{h^2} = 1 + \frac{h^2}{2} + O(h^4) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1,$$

donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 1$.

(b) Montrer que f admet un DL d'ordre 2 en 0. Que conclure ?

On a déjà

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} + O(x^5) = x + o(x^2).$$

Le terme linéaire est x et il n'y a pas de terme en x^2 : f possède bien un DL d'ordre 2. Cela confirme encore la dérivabilité (mais pas nécessairement la dérivabilité seconde).

(c) Démontrer que g admet une fonction réciproque sur \mathbb{R} , dont on donnera un DL à l'ordre 3 en 0.

Monotonie. Pour $x \neq 0$,

$$g'(x) = \frac{2x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + 1}{x^2} = \frac{1 + (2x^2 - 1)e^{x^2}}{x^2} > 0,$$

car $e^{x^2} \geq 1$ et $1 + (2x^2 - 1)e^{x^2} > 0$ pour tout x . De plus $g'(0) = 1 > 0$. Donc g est strictement croissante et continue sur \mathbb{R} ; comme $g(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$ et $g(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, elle est bijective et possède une réciproque g^{-1} .

DL de g^{-1} à l'ordre 3. Posons $y = g(x) = x + \frac{x^3}{2} + O(x^5)$. On cherche x sous la forme $x = Ay + By^3 + o(y^3)$.

$$g(Ay + By^3) = Ay + By^3 + \frac{1}{2}(Ay)^3 + o(y^3) = Ay + \left(B + \frac{1}{2}A^3\right)y^3 + o(y^3).$$

L'identité $g(g^{-1}(y)) = y$ impose

$$A = 1, \quad B + \frac{1}{2}A^3 = 0 \implies B = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$g^{-1}(y) = y - \frac{y^3}{2} + o(y^3) \quad (y \rightarrow 0).$$

► Approfondissement

17. *Énoncé* : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) *Montrer que f est continue en 0. Est-elle dérivable en 0 ?*

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{(1+\frac{1}{x})\ln x}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x = -\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Par conséquent f est bien continue en 0.

Étudions ensuite le taux de variation de f en 0 : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(b) *Étudier les variations et les limites de f . Quelles sont ses branches infinies ?*

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

f est dérivable sur \mathbb{R} et pour $x > 0$:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x}\right) f(x) = \frac{f(x)}{x^2} (x + 1 - \ln x)$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $g(x) = x + 1 - \ln x$. g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. g est donc décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Comme $g(1) = 2 > 0$, on en déduit que g est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* . Par conséquent, f est croissante sur \mathbb{R}_+ .

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$. Pour $x > 0$, $f(x) - x = x \left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right)$. Or $e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$.

Donc $f(x) - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$. Donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$. \mathcal{C} admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

(c) *Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de f .*

Posons $x = 1 + h$, de sorte que $f(x) = f(1 + h) = e^{(1+\frac{1}{1+h})\ln(1+h)}$. On a d'une part :

$$1 + \frac{1}{1+h} \underset{h \rightarrow 0}{=} 2 - h + h^2 + o(h^2)$$

et d'autre part :

$$\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3) \underset{h \rightarrow 0}{=} h \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right)$$

De sorte que,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1+h}\right) \ln(1+h) &= h \left(2 - 2h + \frac{13}{6}h^2 + o(h^2)\right) \\ &= 2h - 2h^2 + \frac{13}{6}h^3 + o(h^3) \end{aligned}$$

Posons $u = 2h - 2h^2 + \frac{13}{6}h^3 + o(h^3)$. On a $u \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$.
On trouve $u^2 \underset{h \rightarrow 0}{=} 4h^2 - 8h^3 + o(h^3)$ et $u^3 = 8h^3 + o(h^3)$. Il vient finalement :

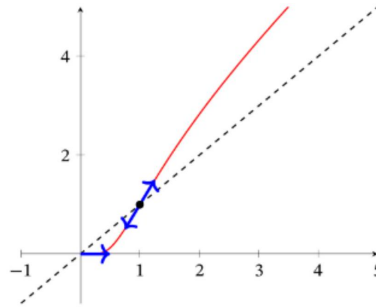
$$f(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 + 2h - \frac{1}{2}h^3 + o(h^3)$$

c'est-à-dire :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

- (d) Préciser l'équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} de f au point d'abscisse 1. Préciser la position relative de \mathcal{T} et \mathcal{C} au voisinage du point d'abscisse 1. Faire un dessin.

On déduit de la question précédente que \mathcal{C} admet au point d'abscisse 1 une tangente d'équation $y = 1 + 2(x-1)$ i.e. $y = 2x - 1$. On déduit la position relative de \mathcal{C} et \mathcal{T} du signe de $-\frac{1}{2}(x-1)^3$. Au voisinage de 1^- , \mathcal{C} est au-dessus de \mathcal{T} et au voisinage de 1^+ , \mathcal{C} est au-dessous de \mathcal{T} .



18. *Enoncé* : Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\operatorname{sh}(x)} - \operatorname{sh}(x)^x}{\sin(x)^x - x^{\sin(x)}}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$: les deux termes du numérateur et les deux termes du dénominateur tendent vers 1 quand r tend vers zéro. On va chercher un équivalent du numérateur et du dénominateur. On a $(\operatorname{sh} x)^x = \exp(x \ln \operatorname{sh} x)$ et

$$\begin{aligned} x \ln \operatorname{sh}(x) &= x \ln(x + o(x)) = x(\ln x + \ln(1 + o(1))) \\ &= x(\ln x + o(1)) = x \ln x + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{sh} x \ln x \underset{0^+}{\sim} x \ln x$ tend également vers 0, on peut écrire pour le numérateur

$$x^{\operatorname{sh} x} - (\operatorname{sh} x)^x = (\operatorname{sh} x)^x \left(e^{\ln x \operatorname{sh} x - x \ln \operatorname{sh} x} - 1 \right) \underset{0^+}{\sim} \ln x \operatorname{sh} x - x \ln \operatorname{sh} x$$

car $(\operatorname{sh} x)^r$ tend vers 1 par continuité de l'exponentielle et $e^u - 1$ est équivalent à u en 0. De plus si on pose $u(x) = \ln_1 x \operatorname{sh} x - x \ln \operatorname{sh} x$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \ln x - x \ln \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &= x \ln x + \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x) - x \ln x - x \ln \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \\ &= \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x) \end{aligned}$$

On procède de même pour le dénominateur. On a également $x \ln \sin x$ et $\sin x \ln x$ qui tendent vers 0 lorsque x tend vers 0^+ , si bien que

$$(\sin x)^x - x^{\sin x} \underset{0^+}{\sim} x \ln \sin x - \ln x \sin x = v(x)$$

et

$$\begin{aligned} v(x) &= x \ln \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \ln x \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &= x \ln x + x \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) - x \ln x + \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x) \\ &= \frac{x^3 \ln x}{6} + o(x^3 \ln x) \end{aligned}$$

On conclut que $\frac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{(\sin x)^x - x^{\sin x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3 \ln x}{6}}{\frac{x^3 \ln x}{6}} = 1$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{(\sin x)^x - x^{\sin x}} = 1$$

19. *Énoncé : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 et vérifiant $f(0) = 0$. Déterminer la limite de la suite (s_n) définie pour $n \geq 1$ par :*

$$s_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$