Analyse asymptotique

▶ Développements limités et asymptotiques

1. Effectuer un développement limité à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes :
   (a) $x \mapsto \ln(1+\cos(2x))$; (e) $x \mapsto \dfrac{1+x-e^x\cos(x)}{x-\ln(1+x)}$; (i) $x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$;
   (b) $x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$; (f) $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(3x)}$; (j) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$;
   (c) $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$; (g) $x \mapsto e^{sin(x)}$ (k) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$;
   (d) $x \mapsto \ln(\sqrt{1+x})$; (h) $x \mapsto \dfrac{2x+x^2}{\ln(1+x)}$; (ℓ) $x \mapsto \sin(x)(\mathrm{ch}(x)-1)$.
2. Effectuer un développement limité des expressions suivantes à l'ordre et au voisinage du point indiqués :
   (a) à l'ordre 2, en 1 : $x \mapsto \dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$; (c) à l'ordre 3 , en $\dfrac{\pi}{4}$: $x \mapsto \tan(x)$;
   (b) à l'ordre 2, en $\dfrac{\pi}{3}$: $x \mapsto \sin(\pi\cos(x))$; (d) à l'ordre 7 , en $\dfrac{\pi}{2}$: $x \mapsto \cos(\pi\sin(x))$.
3. Déterminer un développement asymptotique à la précision et au voisinage indiqués des fonctions suivantes :
   (a) à la précision x^2, en 0 : $x \mapsto \dfrac{1}{x\,(\mathrm{e}^x-1)} - \frac{1}{x^2}$;
   (b) à la précision $\dfrac{1}{x^5}$, en $+\infty$: $x \mapsto \dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$;
   (c) à la précision $\dfrac{1}{x^3}$, en $+\infty$: $x \mapsto x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x)$;
   (d) à la précision $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$, en $+\infty$: $x \mapsto \left(\frac{1}{x}+1\right)^{x^2}$.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de
$$x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right).$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de
$$x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right).$$
   (c) Déterminer le développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de
$$x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\,.$$

▶ Suites numériques

5. Donner un équivalent simple des suites suivantes (données pour $n \geq 2$) et en déduire leur limite :
   (a) $u_n = n^2\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)$; (b) $v_n = n\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)+1$; (c) $w_n = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n}$.
6. Soit u une suite convergeant vers 0. Déterminer la limite éventuelle des suites de termes généraux suivants :
   (a) $\dfrac{\ln(1+u_n)}{\sin(u_n)}$; (b) $\dfrac{1-e^{u_n}}{u_n^3+u_n^4}$; (c) $(\sqrt[3]{1+u_n^2})^5$.
7. Soit $a > 0$; déterminer un équivalent simple de la suite de terme général $a^{a+\frac{1}{n}} - \left(a+\dfrac{1}{n}\right)^a$.

8. Soit u une suite convergeant vers 1 ; déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général $\dfrac{u_n^{u_n} - u_n}{\ln(u_n)}$.
9. Établir que $\displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}$.

▶ Études de fonctions

10. Déterminer les limites suivantes, si elles existent :
    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{1 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$;
    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - x\tan(x)}{\sin^3(x)}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}$; (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))}$;
11. Donner un équivalent en 0 des fonctions suivantes :
    (a) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right) - \frac{4x+x^2}{8}$; (b) $x \mapsto \sin(\mathrm{sh}(x)) - \mathrm{sh}(\sin(x))$; (c) $x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. Déterminer les éventuelles asymptotes aux courbes des fonctions suivantes, ainsi que leur position relativement à ces dernières :
    (a) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x+2}$; (b) $g : x \mapsto x \arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$; (c) $h : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.
13. Soit $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Démontrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
    (b) On pose, pour $n \geq 0$, $u_n = x_n - n\pi$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \arctan(x_n)$ et en déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite que l'on précisera.
    (c) Donner un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n}$ de la suite $(x_n)_n$.
14. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction
$$f : x \mapsto \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x} + c^{1/x}}{3}\right)^x.$$
15. On considère la fonction $f : x \mapsto x + x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
    (a) Démontrer que f se prolonge en une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$. Ce prolongement est–il deux fois dérivable en 0 ?
    (b) Montrer que f admet un DL d'ordre 2 en 0. Que conclure ?
16. On s'intéresse à la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
    (a) Vérifier que f se prolonge en une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$.
    (b) Démontrer que g admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}$, dont on donnera un DL à l'ordre 3 en 0.

▶ Approfondissements

17. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
    (a) Montrer que f est continue en 0. Est–elle dérivable en 0 ?
    (b) Étudier les variations et limites de f. Quelles sont ses branches infinies ?
    (c) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de f.
    (d) Préciser l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 1. Préciser la position relative de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$ au voisinage du point d'abscisse 1. Faire un dessin.
18. Calculer
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\mathrm{sh}(x)} - \mathrm{sh}(x)^x}{\sin(x)^x - x^{\sin(x)}} \, .$$
19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 et vérifiant $f(0) = 0$. Déterminer la limite de la suite de terme général (pour ≥ 1)
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

▶ Exercices CCINP

$\boxed{1}$ 1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\boxed{46}$ 1. Prouver que, au voisinage de $+\infty, \pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.