

DÉNOMBREMENT ET COMBINATOIRE

► Dénombrement

1. *Énoncé* : Déterminer le nombre d'anagrammes des mots "lapin", "erratum" et "protozoaire".

(a) Pour "lapin" : il y a 5 lettres deux à deux distinctes donc :

$$5! = 120 \text{ anagrammes possibles}$$

(b) Pour "erratum" : il y a 7 lettres dont 2 "r" identiques donc :

$$\frac{7!}{2!} = 2520 \text{ anagrammes possibles}$$

(c) Pour "protozoaire" : il y a 11 lettres dont 3 "o" et 2 "r" identiques donc :

$$\frac{11!}{3! \cdot 2!} = 166320 \text{ anagrammes possibles}$$

Autre méthode :

Il suffit de poser la bijection (par exemple pour "protozoaire") :

$$\sigma[[1, 11]] \longrightarrow \{P, R, O, T, \hat{O}, Z, \ddot{O}, A, I, R!, E\}$$

Puis ensuite de calculer le cardinal de l'ensemble d'arrivée.

- P \rightarrow 11
- T \rightarrow 10
- Z \rightarrow 9
- I \rightarrow 8
- E \rightarrow 7
- Z \rightarrow 6
- O $\rightarrow \binom{5}{3} = 10$
- R $\rightarrow \binom{2}{2} = 1$

Donc le nombre d'anagrammes est :

$$11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 10 \times 1 = 166320$$

2. *Énoncé* : Soient A, B, C trois parties finies d'un ensemble E . Déterminer $\text{Card}(A \cup B \cup C)$.

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}((A \cup B) \cap C) \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

3. *Énoncé* : Combien existe-t-il d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 1000 qui ne soient divisibles ni par 5 ni par 7 ?

$$\begin{aligned} N &= \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor \\ &= 200 + 142 - 28 \\ &= 314 \end{aligned}$$

Donc le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 1000 qui ne sont pas divisibles par 5 ou 7 est :

$$1001 - 314 = 687$$

4. *Énoncé* : Soit E un ensemble fini ; déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cup B = E$.

Déterminons le cardinal de

$$\mathcal{E} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \cup B = E\}$$

\mathcal{E} est fini car $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)^2$ (cardinal de $(2^n)^2 = 2^{2n}$).

Fixons $B \in \mathcal{P}(E)$.

Donc

$$\mathcal{E} = \bigcup_{B \in \mathcal{P}(E)} \mathcal{E}_B \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_B = \{(A, B) \mid A \subset E, A \cup B = E\}.$$

Montrons que cette réunion est disjointe :

Soit $B, B' \in \mathcal{P}(E)$ tel que $B \neq B'$:

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), (A, B) \neq (A', B')$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_B \cap \mathcal{E}_{B'} &= \emptyset \\ \mathcal{E} &= \bigsqcup_{B \in \mathcal{P}(E)} \mathcal{E}_B \quad \text{R.D} \end{aligned}$$

Donc

$$|\mathcal{E}| = \sum_{B \in \mathcal{P}(E)} |\mathcal{E}_B|$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_B &= \{(A, B) \mid A \subset E, A \cup B = E\} \\ &= \{(A, B) \mid A \subset E, E \setminus B \subset A\} \\ &= \{(A, B) \mid A \subset E, X \in \mathcal{P}(B)\} \end{aligned}$$

Donc

$$|\mathcal{E}_B| = |\mathcal{P}(B)|$$

Or :

$$|\mathcal{P}(E)| = \left| \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{P}_k(E) \right|$$

Donc

$$|\mathcal{E}| = \sum_{k=0}^n \sum_{B \in \mathcal{P}_k(E)} 2^{|B|} = \sum_{k=0}^n 2^k |\mathcal{P}_k(E)| = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = (2+1)^n = 3^n$$

5. *Enoncé : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$.*

(a) *Combien existe-t-il de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?*

CCP 112.a)

(b) *Démontrer que*

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(X) = n2^{n-1}$$

On a :

$$P(E) = \bigcup_{k=0}^n P_k(E) \quad \text{R.D}$$

Donc posons :

$$S = \sum_{k=0}^n \sum_{X \in P_k(E)} |X|$$

Donc :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n \sum_{X \in P_k(E)} |X| \\ &= \sum_{k=0}^n k \cdot |P_k(E)| \\ &= \sum_{k=1}^n k \times \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

6. *Enoncé : Formule du crible de Poincaré. Soit E un ensemble fini.*

(a) *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Justifier que*

$$\text{Card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Immédiat en développant la somme puisque $x \in E, \mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon.

(b) *Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(E)$. On pose $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$; justifier que*

$$\prod_{i=1}^n (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A_i}) = 0$$

Soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $\chi_A(x) = 1$. De plus, x appartient également à tous les A_i donc $\chi_{A_i}(x) = 1$ pour tout $i \in [1, n]$. On a donc $\prod_{i=1}^n (\chi_A(x) - \chi_{A_i}(x)) = 0$ puisque tous les facteurs sont nuls.

Si $x \notin A$, alors $\chi_A(x) = 0$. De plus, il existe $i_0 \in [1, n]$ tel que $x \notin A_{i_0}$. On a donc $\chi_{A_{i_0}}(x) = 0$. Ainsi $\chi_A(x) - \chi_{A_{i_0}}(x) = 0$ et donc $\prod_{i=1}^n (\chi_A(x) - \chi_{A_i}(x)) = 0$ car l'un des facteurs est nul.

Finalement, $\prod_{i=1}^n (\chi_A(x) - \chi_{A_i}(x)) = 0$ pour tout $x \in E$.

(c) En déduire que

$$\text{card}(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right).$$

En utilisant le fait que $\chi_A^k = \chi_A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient en développant

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (\chi_A - \chi_{A_i}) &= \chi_A + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k \chi_{A_{i_j}} \\ &= \chi_A + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \chi_{\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}} \end{aligned}$$

Puisque $\prod_{i=1}^n (\chi_A - \chi_{A_i}) = 0$, on a :

$$\chi_A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \chi_{\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}}$$

puis

$$\begin{aligned} \sum_{x \in A} \chi_A(x) &= \sum_{x \in A} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \chi_{\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}}(x) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{x \in A} \chi_{\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}}(x) \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la première question pour aboutir à la relation demandée.

7. *Énoncé : Montrer qu'une partie de \mathbb{N} est finie si et seulement si elle est majorée.*

Par axiome, une partie de N est majorée si et seulement si elle admet un plus grand élément N ; elle est alors finie de cardinal inférieur ou égal à $N + 1$.

8. *Énoncé : Démontrer qu'un ensemble E est infini si et seulement si il existe une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ dont les termes sont deux à deux distincts.*

Si une telle suite existe, il est clair que E possède une infinité d'éléments (les termes de cette suite). Réciproquement, si E est un infini on peut poser $u_0 \in E$ puis par récurrence $u_{n+1} \in E \setminus \{u_0, \dots, u_n\}$ pour obtenir une suite de la forme voulue, les ensembles $E \setminus \{u_0, \dots, u_n\}$ étant non vides car E est infini.

► Combinatoire

9. *Enoncé* : Combien de triangles peut-on former avec les sommets d'un polygone régulier à n côtés ?

Il y a autant de tels triangles que de façons de choisir 3 sommets parmi les n disponibles, soit $\binom{n}{3}$.

10. *Enoncé* : Quel est le nombre de relations d'ordre totales sur un ensemble de cardinal $n \geq 1$?

Le nombre recherché est le nombre de façons d'ordonner les n éléments de l'ensemble autrement dit le nombre de permutations de cet ensemble, à savoir $n!$.

11. *Enoncé* : Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Démontrer que

$$p^n = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S(n, k)$$

où, pour $1 \leq k \leq n$, $S(n, k)$ est le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket$.

Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et p . On peut partitionner l'ensemble E^F par :

$$E^F = \bigsqcup_{k=1}^p A_k$$

où A_k est l'ensemble des applications de $f : E \rightarrow F$ vérifiant $|f(E)| = k$. Un élément de A_k étant intégralement déterminé par le choix de son image $f(E)$ (une partie à k éléments de F) et celui de la surjection induite par f sur $f(E)$, on en déduit que $|A_k| = \binom{p}{k} S(n, k)$ d'où le résultat par réunion disjointe.

12. *Enoncé* : On effectue un tirage de 8 cartes parmi un jeu de 32 cartes.

(a) Combien existe-t-il de tels tirages possibles ?

Il faut tirer 8 cartes parmi 32... Le résultat est donc $\binom{32}{8}$

(b) Combien de ces derniers sont constitués de deux carrés ?

Il existe 8 carrés possibles, de fait il existe $\binom{8}{2}$ tels tirages.

13. *Enoncé* : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Démontrer que E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

$$\mathcal{P}(E) = A \sqcup B \text{ avec } \begin{cases} A = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid |X| \equiv 0 \pmod{2}\} \\ B = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid |X| \equiv 1 \pmod{2}\} \end{cases}$$

Montrons que $|A| = |B|$.

$$A = \bigsqcup_{0 \leq 2k \leq n} P_{2k}(E) \quad \text{et} \quad B = \bigsqcup_{1 \leq 2k+1 \leq n} P_{2k+1}(E)$$

$$|A| = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad |B| = \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 |A| - |B| &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} - \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} \\
 &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^{2k} \binom{n}{2k} + \sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^{2k+1} \binom{n}{2k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \\
 &= (1-1)^n \\
 &= 0 \quad \text{car } n \geq 1
 \end{aligned}$$

► Approfondissement

14. *Enoncé* : Soit $n \geq 0$; on appelle **dérangement de taille n** toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe.

(a) Justifier que l'ensemble des dérangements de taille n est fini. On note d_n son cardinal.

L'ensemble considéré est fini car il s'agit d'une partie de \mathfrak{S}_n . De fait, son cardinal d_n existe et vérifie $d_n \leq n!$.

(b) Démontrer que :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$$

Pour $0 \leq k \leq n$, notons A_k l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ admettant exactement k points fixes. Il est alors clair que $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ forme une partition de \mathfrak{S}_n et donc, par cardinal de réunion disjointe :

$$n! = \sum_{k=0}^n |A_k|$$

De plus, tout élément de A_k à k fixé est totalement déterminé par la donnée de l'ensemble F de ses points fixes (une partie à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$) et le dérangement qu'il induit sur $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus F$. Ainsi $d_k = \binom{n}{k} d_{n-k}$ et donc :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} d_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{nk} d_k$$

15. *Enoncé* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E_n = \llbracket 1, n \rrbracket$ et on note \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de E_n . Pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $S_{n,p}$ le nombre de permutations de E_n ayant exactement p points fixes.

(a) Montrer que $S_{n,n} = 1$ et que $S_{n,n-1} = 0$.

Une permutation de E_n à n points fixes est l'identité donc $S_{n,n} = 1$.

Si une permutation a $n-1$ points fixes, le dernier point de E_n est nécessairement un point fixe. Une permutation ne peut avoir exactement $n-1$ points fixes $S_{n,0} = 0$.

(b) *Montrer que :*

$$\sum_{k=0}^n S_{n,k} = n!$$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons $\mathfrak{S}_{n,k}$ la partie de \mathfrak{S}_n formée des permutations ayant exactement k points fixes. La famille $(\mathfrak{S}_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ est une partition de \mathfrak{S}_n . Puisque $\text{card } \mathfrak{S}_{n,k} = S_{n,k}$ et que $\text{card } \mathfrak{S}_n = n!$, on en déduit la formule demandée.

(c) *On pose $\omega_n = S_{n,0}$ avec la convention $\omega_0 = 1$. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :*

$$S_{n,k} = \binom{n}{k} \omega_{n-k}$$

Se donner un élément de $\mathfrak{S}_{n,k}$, c'est se donner k points fixes dans E_n , autrement dit une partie à k éléments de E_n , et permutation sans point fixe des $n-k$ éléments restants. Comme il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de E_n et qu'il y a ω_{n-k} permutations sans point fixe d'un ensemble à $n-k$ éléments, on en déduit $S_{n,k} = \binom{n}{k} \omega_{n-k}$.

(d) *En déduire que :*

$$\sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$$

En utilisant les deux questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n-k} \binom{n}{k}}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n S_{n,k} = 1$$

(e) *En raisonnant par récurrence, montrer que :*

$$\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Notons $\text{HR}(n)$ l'égalité à démontrer. $\text{HR}(0)$ est clairement vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\text{HR}(k)$ vraie pour $0 \leq k \leq n-1$ utilisant la question précédente

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p}{p!}$$

On effectue le changement d'indice $q = p + k$ dans la deuxième somme :

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^n \sum_{q=k}^n \frac{(-1)^{q-k}}{k!(q-k)!}$$

On intervertit les deux sommes :

$$\begin{aligned}\frac{\omega_n}{n!} &= 1 - \sum_{q=1}^n \sum_{k=1}^q \frac{(-1)^q (-1)^k}{k!(q-k)!} \\ &= 1 - \sum_{q=1}^n \frac{(-1)^q}{q!} \sum_{k=1}^q (-1)^k \binom{q}{k}\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^q (-1)^k \binom{q}{k} = \left(\sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} \right) - 1 = (1-1)^q - 1 = -1$ car $q \geq 1$. On a donc

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 + \sum_{q=1}^n \frac{(-1)^q}{q!} = \sum_{q=0}^n \frac{(-1)^q}{q!}$$

Ainsi $\text{HR}(n)$ est vraie. Par récurrence forte, $\text{HR}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

16. *Énoncé : Approximation diophantienne.*

- (a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les réels $\delta_k = kx - [kx]$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer qu'il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q \leq n$ et

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$$

On introduit les intervalles $I_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Puisque I_0, \dots, I_{n-1} forment une partition de $[0, 1[$ et que les réels $\delta_0, \dots, \delta_n$ sont tous dans $[0, 1[$, chacun des $n+1$ réels $\delta_0, \dots, \delta_n$ appartient à un des n intervalles I_0, \dots, I_{n-1} . Par cardinal, deux de ces réels appartiennent au même intervalle. Autrement dit il existe deux entiers k et l de $\llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $k < l$ et un entier $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que δ_k et δ_l appartiennent à I_m . Ainsi, $\frac{m}{n} \leq \delta_k < \frac{m+1}{n}$ et $\frac{m}{n} \leq \delta_l < \frac{m+1}{n}$ puis $-\frac{1}{n} < \delta_l - \delta_k < \frac{1}{n}$ i.e. $|\delta_l - \delta_k| < \frac{1}{n}$. On a alors le résultat voulu en posant $q = l - k$ et $p = [lx] - [kx]$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Notons \mathcal{D} l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$. \mathcal{D} est non vide puisqu'il contient le couple $([x], 1)$. Supposons que \mathcal{D} soit fini. Notons $m = \min_{(p,q) \in \mathcal{D}} \left| x - \frac{p}{q} \right|$. m est bien défini car \mathcal{D} est non vide et fini. De plus, $m > 0$ car x est irrationnel. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq m$. D'après la question précédente, il existe un couple $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $s \leq n$ et $\left| x - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{ns}$. Puisque $s \geq 1$,

$$\left| x - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{ns} \leq \frac{1}{n} \leq m$$

donc $(r, s) \notin \mathcal{D}$.

De plus, $s \leq n$ donc

$$\left| x - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{ns} \leq \frac{1}{s^2}$$

donc $(r, s) \in \mathcal{D}$ d'où une contradiction.

(c) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Notons \mathcal{E} l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$. Pour $p \in \mathcal{E}$, notons \mathcal{D}_p l'ensemble des entiers $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$. On a $\mathcal{D} = \bigcup_{p \in \mathcal{E}} \{p\} \times \mathcal{D}_p$. Supposons que \mathcal{E} soit fini. Puisque \mathcal{D} est infini, il existe un entier $p \in \mathcal{E}$ tel que \mathcal{D}_p soit infini. En particulier, on peut construire une suite strictement croissante (q_n) d'éléments de \mathcal{D}_p . Puisque (q_n) est à valeurs entières, (q_n) diverge vers $+\infty$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| x - \frac{p}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$ donc, par passage à la limite, $|x| \leq 0$ i.e. $x = 0$, ce qui est absurde car x est irrationnel. Ainsi \mathcal{E} est infini.

(d) On admet l'irrationalité de π (en particulier, $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On pose :

$$u_n = \frac{1}{n \sin n}$$

On suppose que la suite $(u_n)_n$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $l = 0$ et en déduire une contradiction.

Supposons $l > 0$. Alors $(u_n)_n$ est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n \sin n} \geq m$ pour tout $n \geq N$. Ainsi $0 \leq \sin n \leq \frac{1}{nm}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite $(\sin n)_n$ converge vers 0 ce qui est classiquement faux. En considérant la suite $(-u_n)_n$, on montre de même qu'on ne peut avoir $l < 0$.

On en conclut que $l = 0$.

Comme l'ensemble \mathcal{E} est infini, on peut trouver une suite strictement croissante $(p_n)_n$ à valeurs dans \mathcal{E} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $q_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left| \pi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$ i.e. $|q_n \pi - p_n| < \frac{1}{q_n}$. Remarquons en particulier que $q_n \pi > p_n - \frac{1}{q_n} \leq p_n - 1$. Ainsi (q_n) diverge également vers $+\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \pi$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|\sin(p_n)| = |\sin(q_n \pi - p_n)| \leq |q_n \pi - p_n| < \frac{1}{q_n}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{p_n}| > \frac{q_n}{p_n}$. Comme $(u_{p_n})_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$, on obtient $0 \leq \pi$ par passage à la limite d'où la contradiction.

Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ n'admet pas de limite.