TD 16

Dénombrement

6. (a) 1. Immédiat en développant la somme puisque $x \in \mathrm{E}, \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) = 1$ si $x \in \mathrm{A}$ et $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) = 0$ sinon.

(b) Soit $x \in \mathrm{E}$. Si $x \in \mathrm{A}$, alors $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) = 1$. De plus, x appartient également à tous les A_i donc $\mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}(x) = 1$ pour tout $i \in [1, n]$. On a donc $\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) - \mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}(x)) = 0$ puisque tous les facteurs sont nuls.
Si $x \notin \mathrm{A}$, alors $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) = 0$. De plus, il existe $i_0 \in [1, n]$ tel que $x \notin \mathrm{A}_{i_0}$. On a donc $\mathbb{1}_{\mathrm{A}_{i_0}}(x) = 0$. Ainsi $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) - \mathbb{1}_{\mathrm{A}_{i_0}}(x) = 0$ et donc $\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) - \mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}(x)) = 0$ car l'un des facteurs est nul.
Finalement, $\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) - \mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

(c) En utilisant le fait que $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}^k = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient en développant

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_{\mathrm{A}} - \mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}) &= \mathbb{1}_{\mathrm{A}} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{\mathrm{A}_{i_j}} \\
&= \mathbb{1}_{\mathrm{A}} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{\cap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j}}
\end{aligned}$$

Puisque $\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_{\mathrm{A}} - \mathbb{1}_{\mathrm{A}_l}) = 0$, on a :

$$\mathbb{1}_{\mathrm{A}} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{\cap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j}}$$

puis

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathrm{A}} \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) &= \sum_{x \in \mathrm{A}} \sum_{k=1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{\cap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j}}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \sum_{x \in \mathrm{A}} \mathbb{1}_{\cap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j}}(x)
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser la première question pour aboutir à la relation demandée.

7. Par axiome, une partie de N est majorée si et seulement si elle admet un plus grand élément N ; elle est alors finie de cardinal inférieur ou égal à $N+1$.
8. Si une telle suite existe, il est clair que E possède une infinité d'éléments (les termes de cette suite). Réciproquement, si E est un infini on peut poser $u_0 \in E$ puis par récurrence $u_{n+1} \in E \backslash \{u_0, \ldots, u_n\}$ pour obtenir une suite de la forme voulue, les ensembles $E \setminus \{u_0, \ldots, u_n\}$ étant non vides car E est infini.

Combinatoire

9. Il y autant de tels triangles que de façons de choisir 3 sommets parmi les n disponibles, soit $\binom{n}{3}$.
10. Le nombre recherché est le nombre de façons d'ordonner les n éléments de l'ensemble autrement dit le nombre de permutations de cet ensemble, à savoir $n!$.
11. Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et p. On peut partitionner l'ensemble E^F par :

$$E^F = \bigsqcup_{k=1}^{p} A_k$$

où A_k est l'ensemble des applications de $f : E \to F$ vérifiant $|f(E)| = k$. Un élément de A_k étant intégralement déterminé par le choix de sont image $f(E)$ (une partie à k éléments de F) et celui de la surjection induite par f sur $f(E)$, on en déduit que $|A_k| = \binom{p}{k} S(n,k)$ d'où le résultat par réunion disjointe.

12. (a) Il faut tirer 8 cartes parmi 32... Le résultat est donc $\binom{32}{8}$
    (b) Il existe 8 carrés possibles, de fait il existe $\binom{8}{2}$ tels tirages.

Approfondissements

14. (a) L'ensemble considéré est fini car il s'agit d'une partie de $\mathfrak{S}_n$. De fait, son cardinal d_n existe et vérifie $d_n \leq n!$.

(b) Pour $0 \leq k \leq n$, notons A_k l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ admettant exactement k points fixes. Il est alors clair que $(A_k)_{0\leq k\leq n}$ forme une partition de $\mathfrak{S}_n$ et donc, par cardinal de réunion disjointe :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} |A_k| \,.$$

De plus, tout élément de A_k à k fixé est totalement déterminé par la donnée de l'ensemble F de ses points fixes (une partie à k éléments de $[\![1, n]\!]$) et le dérangement qu'il induit sur $[\![1, n]\!] \setminus F$. Ainsi $d_k = \binom{n}{k} d_{n-k}$ et donc :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{nk} d_k \,.$$

15. (a) Une permutation de E_n à n points fixes est l'identité donc $\mathrm{S}_{n,n} = 1$.

Si une permutation a $n-1$ points fixes, le dernier point de E_n est nécessairement un point fixe. Une permutation ne peut d avoir exactement $n-1$ points fixes $S_{n,0} = 0$.
(b) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, notons $\mathfrak{S}_{n,k}$ la partie de $\mathfrak{S}_n$ formée des permutations ayant exactement k points fixes. La famille $(\mathfrak{S}_{n,k})_{0\leq}$ est une partition de $\mathfrak{S}_n$. Puisque card $\mathfrak{S}_{n,k} = \mathrm{S}_{n,k}$ et que card $\mathfrak{S}_n = n!$, on en déduit la formule demandée.
(c) Se donner un élément de $\mathfrak{S}_{n,k}$, c'est se donner k points fixes dans E_n, autrement dit une partie à k éléments de E_n, et permutation sans point fixe des $n-k$ éléments restants. Comme il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de E_n et qu'il y a ω_{n-k} permutati sans point fixe d'un ensemble à $n-k$ éléments, on en déduit $\mathrm{S}_{n,k} = \binom{n}{k}\omega_{n-k}$.
(d) En utilisant les deux questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}\binom{n}{k}}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_{n,k} = 1$$

(e) Notons $\mathrm{HR}(n)$ l'égalité à démontrer. $\mathrm{HR}(0)$ est clairement vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathrm{HR}(k)$ vraie pour $0 \leq k \leq n-1$ utilisant la question précédente

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a alors :

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p}{p!}$$

On effectue le changement d'indice $q = p + k$ dans la deuxième somme :

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=k}^{n} \frac{(-1)^{q-k}}{k!(q-k)!}$$

On intervertit les deux sommes :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n}{n!} &= 1 - \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^q(-1)^k}{k!(q-k)!} \\ &= 1 - \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q!} \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \binom{q}{k} \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} (-1)^k \binom{q}{k} = \left(\sum_{k=0}^{q} (-1)^k \binom{q}{k} \right) - 1 = (1-1)^q - 1 = -1$ car $q \geq 1$. On a donc

$$\frac{\omega_n}{n!} = 1 + \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{q!} = \sum_{q=0}^{n} \frac{(-1)^q}{q!}$$

Ainsi HR(n) est vraie. Par récurrence forte, HR(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

16. (a) On introduit les intervalles $\mathrm{I}_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque $\mathrm{I}_0, \ldots, \mathrm{I}_{n-1}$ forment une partition de $[0, 1[$ et que les réels $\delta_0, \ldots, \delta_n$ sont tous dans $[0, 1\,[$, chacun des $n+1$ réels $\delta_0, \ldots, \delta_n$ appartient à un des n intervalles $\mathrm{I}_0, \ldots, \mathrm{I}_{n-1}$. Par cardinal, deux de ces réels appartiennent au même intervalle. Autrement dit il existe deux entiers k et l de $[\![0, n]\!]$ tels que $k < l$ et un entier $m \in [\![0, n-1]\!]$ tel que δ_k et δ_l appartiennent à I_m. Ainsi, $\frac{m}{n} \leq \delta_k < \frac{m+1}{n}$ et $\frac{m}{n} \leq \delta_l < \frac{m+1}{n}$ puis $-\frac{1}{n} < \delta_l - \delta_k < \frac{1}{n}$ i.e. $|\delta_l - \delta_k| < \frac{1}{n}$. On a alors le résultat voulu en posant $q = l - k$ et $p = \lfloor lx \rfloor - \lfloor kx \rfloor$.

(b) Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$. $\mathcal{D}$ est non vide puisqu'il contient le couple, $(\ \lfloor x \rfloor, 1\ )$. Supposons que $\mathcal{D}$ soit fini. Notons $m = \min_{(p,q)\in\mathcal{D}} \left| x - \frac{p}{q} \right|$. m est bien défini car $\mathcal{D}$ est non vide et fini. De plus, $m > 0$ car x est irrationnel. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$\frac{1}{n} \leq m$. D'après la question précédente, il existe un couple $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $s \leq n$ et $\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns}$. Puisque $s \geq 1$,

$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns} \leq \frac{1}{n} \leq m$$

donc $(r, s) \notin \mathcal{D}$.
De plus, $s \leq n$ donc

$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{ns} \leq \frac{1}{s^2}$$

donc $(r, s) \in \mathcal{D}$ d'où une contradiction.
(c) Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. Pour $p \in \mathcal{E}$, notons $\mathcal{D}_p$ l'ensemble des entiers $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. On a $\mathcal{D} = \bigcup_{p \in \mathcal{E}} \{p\} \times \mathcal{D}_p$. Supposons que $\mathcal{E}$ soit fini. Puisque $\mathcal{D}$ est infini, il existe un entier $p \in \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{D}_p$ soit infini. En particulier, on peut construire une suite strictement croissante (q_n) d'éléments de $\mathcal{D}_p$. Puisque (q_n) est à valeurs entières, (q_n) diverge vers $+\infty$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|x - \frac{p}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ donc, par passage à la limite, $|x| \leq 0$ i.e. $x = 0$, ce qui est absurde car x est irrationnel.
Ainsi $\mathcal{E}$ est infini.
(d) Supposons $l > 0$. Alors $(u_n)_n$ est minorée par un réel $m > 0$ à partir d'un certain rang. Il existe donc $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n \sin n} \geq m$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. Ainsi $0 \leq \sin n \leq \frac{1}{nm}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite $(\sin n)_n$ converge vers 0 ce qui est classiquement faux. En considérant la suite $(-u_n)_n$, on montre de même qu'on ne peut avoir $l < 0$.
On en conclut que $l = 0$.
Comme l'ensemble $\mathcal{E}$ est infini, on peut trouver une suite strictement croissante $(p_n)_n$ à valeurs dans $\mathcal{E}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $q_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ i.e. $|q_n\pi - p_n| < \frac{1}{q_n}$. Remarquons en particulier que $q_n\pi > p_n - \frac{1}{q_n} \leq p_n - 1$. Ainsi (q_n) diverge également vers $+\infty$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \pi$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|\sin(p_n)| = |\sin(q_n\pi - p_n)| \leq |q_n\pi - p_n| < \frac{1}{q_n}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{p_n}| > \frac{q_n}{p_n}$. Comme $(u_{p_n})_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$, on obtient $0 \leq \pi$ par passage à la limite d'où la contradiction.
Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ n'admet pas de limite.