Dénombrement et combinatoire

► Dénombrement

1. Déterminer le nombre d'anagrammes des mots "lapin", "erratum" et "protozoaire".
2. Soient A, B, C trois parties finies d'un ensemble E. Déterminer $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C)$.
3. Combien existe–t–il d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 1000 qui ne soient divisibles ni par 5 ni par 7 ?
4. Soit E un ensemble fini ; déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cup B = E$.
5. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$.
   (a) Combien existe–t–il de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?
   (b) Démontrer que
   $$\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \mathrm{Card}(X) = n2^{n-1} .$$
6. *Formule du crible de Poincaré.* Soit E un ensemble fini.
   (a) Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$. Justifier que
   $$\mathrm{Card}(\mathrm{A}) = \sum_{x \in \mathrm{E}} \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) .$$
   (b) Soit $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$. On pose $\mathrm{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i$; justifier que
   $$\prod_{i=1}^{n} (\mathbb{1}_{\mathrm{A}} - \mathbb{1}_{\mathrm{A}_i}) = 0$$
   (c) En déduire que
   $$\mathrm{card}(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathrm{card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{A}_{i_j} \right) .$$
7. Montrer qu'une partie de $\mathbb{N}$ est finie si et seulement si elle est majorée.
8. Démontrer qu'un ensemble E est infini si et seulement si il existe une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ dont les termes sont deux à deux distincts.

► Combinatoire

9. Combien de triangles peut–on former avec les sommets d'un polygone régulier à n côtés ?
10. Quel est le nombre de relations d'ordre totales sur un ensemble de cardinal $n \geq 1$?
11. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. Démontrer que
    $$p^n = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S(n, k)$$
    où, pour $1 \leq k \leq n$, $S(n, k)$ est le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$.
12. On effectue un tirage de 8 cartes parmi un jeu de 32 cartes.
    (a) Combien existe–t–il de tels tirages possibles ?
    (b) Combien de ces derniers sont constitués de deux carrés ?
13. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Démontrer que E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

▶ Approfondissements

14. Soit $n \geq 0$; on appelle *dérangement* de taille n toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe.
    (a) Justifier que l'ensemble des dérangements de taille n est fini. On notera d_n son cardinal.
    (b) Démontrer que
    $$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k \,.$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{E}_n = [\![1, n]\!]$ et on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de E_n. Pour $p \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathrm{S}_{n,p}$ le nombre de permutations de E_n ayant exactement p points fixes.
    (a) Montrer que $S_{n,n} = 1$ et que $S_{n,n-1} = 0$.
    (b) Montrer que
    $$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}_{n,k} = n!\,.$$
    (c) On pose $\omega_n = \mathrm{S}_{n,0}$ avec la convention que $\omega_0 = 1$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a :
    $$\mathrm{S}_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \omega_{n-k}\,.$$
    (d) En déduire que
    $$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1\,.$$
    (e) En raisonnant par récurrence, montrer que
    $$\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

16. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les réels $\delta_k = kx - \lfloor kx \rfloor$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer qu'il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $q \leq n$ et
    $$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}\,.$$
    (b) Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que
    $$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}\,.$$
    (c) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $p \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que
    $$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}\,.$$
    (d) On admet l'irrationalité de π. En particulier, $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $u_n = \frac{1}{n \sin n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la suite $(u_n)_n$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\ell = 0$. et aboutir à une contradiction.

▶ Exercice CCINP

$\boxed{112}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathscr{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.