FRACTIONS RATIONNELS

▶ Décomposition en éléments simples

1. *Enoncé : Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions suivantes :*

   (a) $\frac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)}$;
   Posons :

$$A = X^4 - 2, \qquad B = X(X+1)(X+2), \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)}$$

Q est de degré 1, donc on développe le dénominateur :

$$X(X+1)(X+2) = X^3 + 3X^2 + 2X$$

On réalise la division euclidienne de $X^4 - 2$ par $X^3 + 3X^2 + 2X$:

$$\begin{array}{r|l} X^4 \qquad\qquad\qquad -2 & X^3+3X^2+2X \\ \cline{2-2} -X^4-3X^3-2X^2 \qquad\qquad & X-3 \\ \cline{1-1} -3X^3-2X^2 \qquad\quad & \\ 3X^3+9X^2+6X \quad & \\ \cline{1-1} 7X^2+6X-2 & \end{array}$$

Donc :

$$\exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C} \quad Q = (X-3) + \frac{\lambda}{X} + \frac{\mu}{X+1} + \frac{\nu}{X+2}$$

Ce sont des pôles simples, donc par formule du cours :

$$\lambda = \frac{A(0)}{(0-(-1))(0-(-2))} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\mu = \frac{A(-1)}{((-1)-0)((-1)-(-2))} = \frac{(-1)^4-2}{(-1)(1)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\nu = \frac{A(-2)}{((-2)-0)((-2)-(-1))} = \frac{(-2)^4-2}{(-2)(-1)} = \frac{16-2}{2} = 7$$

Donc la décomposition en éléments simples est :

$$Q = (X-3) - \frac{1}{X} + \frac{1}{X+1} + \frac{7}{X+2}$$

   (b) $\frac{X^3+2}{(X-1)X(X+1)}$;
   Posons :

$$A = X^3 + 2, \qquad B = (X-1)X(X+1), \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{X^3+2}{(X-1)X(X+1)}$$

Q est de degré 0, donc on développe le dénominateur :

$$(X-1)X(X+1) = X(X^2-1) = X^3 - X$$

On réalise la division euclidienne de $X^3 + 2$ par $X^3 - X$:

$$\begin{array}{rr|l} X^3 & +2 & X^3 - X \\ \cline{3-3} -X^3 + X & & 1 \\ \cline{1-2} & X+2 & \end{array}$$

Donc :

$$\exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C} \quad Q = 1 + \frac{\lambda}{X} + \frac{\mu}{X-1} + \frac{\nu}{X+1}$$

Ce sont des pôles simples, donc par formule du cours :

$$\lambda = \frac{A(0)}{(0-1)(0-(-1))} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\mu = \frac{A(1)}{(1-0)(1-(-1))} = \frac{1^3+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\nu = \frac{A(-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}$$

Donc la décomposition en éléments simples est :

$$Q = 1 - \frac{2}{X} + \frac{3}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)}$$

(c) $\frac{X^2}{(X-\pi)(X+\pi)}$;

Posons :

$$A = X^2, \qquad B = (X-\pi)(X+\pi), \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{X^2}{(X-\pi)(X+\pi)}$$

Q est de degré 0, donc on développe le dénominateur :

$$(X-\pi)(X+\pi) = X^2 - \pi^2$$

On réalise la division euclidienne de X^2 par $X^2 - \pi^2$:

$$\begin{array}{r|l} X^2 & X^2 - \pi^2 \\ \cline{2-2} -X^2 + \pi^2 & 1 \\ \cline{1-1} \pi^2 & \end{array}$$

Donc :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad Q = 1 + \frac{\lambda}{X-\pi} + \frac{\mu}{X+\pi}$$

Les racines sont simples (π et $-\pi$), donc par formule du cours :

$$\lambda = \frac{A(\pi)}{(\pi-(-\pi))} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\mu = \frac{A(-\pi)}{(-\pi-(\pi))} = \frac{\pi^2}{-2\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

Donc la décomposition en éléments simples est :

$$Q = 1 + \frac{\pi/2}{X-\pi} - \frac{\pi/2}{X+\pi}$$

(d) $\frac{X+1}{(X+2)(X+e)}$;
Posons :

$$A = X+1, \qquad B = (X+2)(X+e), \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{X+1}{(X+2)(X+e)}$$

Q est de degré -1
Donc :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad Q = \frac{\lambda}{X+2} + \frac{\mu}{X+e}$$

Les racines sont simples (-2 et $-e$), donc par formule du cours :

$$\lambda = \frac{A(-2)}{((-2)-(-e))} = \frac{-1}{-2+e} = \frac{1}{2-e}$$
$$\mu = \frac{A(-e)}{((-e)-(-2))} = \frac{-e+1}{-e+2} = \frac{1-e}{2-e}$$

Donc la décomposition en éléments simples est :

$$Q = \frac{1}{2-e} \times \frac{1}{X+2} + \frac{1-e}{2-e} \times \frac{1}{X+e}$$

(e) $\frac{X^2+X+1}{(X-i)(X+i)(X-1)}$;
Posons :

$$A = X^2+X+1, \qquad B = (X-i)(X+i)(X-1), \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{X^2+X+1}{(X-i)(X+i)(X-1)}$$

Q est de degré -1
Donc :

$$\exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C} \quad Q = \frac{\lambda}{X-i} + \frac{\mu}{X+i} + \frac{\nu}{X-1}$$

Les racines sont simples (i, $-i$ et 1), donc par formule du cours :

$$\lambda = \frac{A(i)}{(i-(-i))(i-1)} = \frac{i^2+i+1}{2i(i-1)} = \frac{-1+i+1}{2i(i-1)} = \frac{i}{2i(i-1)} = \frac{1}{2(i-1)}$$

Or :

$$\frac{1}{2(i-1)} = \frac{i+1}{2(i-1)(i+1)} = \frac{i+1}{2(i^2-1)} = \frac{i+1}{2(-1-1)} = \frac{i+1}{-4} = -\frac{i+1}{4}$$

$$\mu = \frac{A(-i)}{((-i)-(i))((-i)-1)} = \frac{(-i)^2-i+1}{(-2i)(-i-1)} = \frac{-1-i+1}{-2i(-i-1)} = \frac{-i}{-2i(-i-1)} = \frac{1}{2(-i-1)}$$

Or :

$$\frac{1}{2(-i-1)} = \frac{-i+1}{2(-i-1)(-i+1)} = \frac{-i+1}{2((-i)^2-1)} = \frac{-i+1}{2(-1-1)} = \frac{-i+1}{-4} = \frac{i-1}{4}$$

$$\nu = \frac{A(1)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1^2+1+1}{(1-i)(1+i)} = \frac{3}{2}$$

Donc la décomposition en éléments simples est :

$$Q = -\frac{i+1}{4} \times \frac{1}{X-i} + \frac{i-1}{4} \times \frac{1}{X+i} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{X-1}$$

(f) $\frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)}$;
Posons :

$$A = X+1, \qquad B = (X-1)^2(X-2)(X-3), \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)}$$

Q est de degré -2
Donc :

$$\exists \lambda, \mu, \nu, \rho \in \mathbb{C} \quad Q = \frac{\lambda}{(X-1)^2} + \frac{\mu}{X-1} + \frac{\nu}{X-2} + \frac{\rho}{X-3}$$

Pour les pôles simples ($X-2$ et $X-3$) on utilise la formule du cours :

$$\nu = \frac{A(2)}{(2-3)(2-1)^2} = \frac{3}{-1} = -3$$
$$\rho = \frac{A(3)}{(3-2)(3-1)^2} = \frac{4}{4} = 1$$

On multiplie l'équation par $(X-1)^2$ et on l'évalue en "$X=1$" ce qui donne :

$$\begin{aligned}
(X-1)^2 Q &= \lambda + \mu(X-1) + \frac{\nu(X-1)^2}{X-2} + \frac{\rho(X-1)^2}{X-3} \\
\frac{X+1}{(X-2)(X-3)} &= \lambda + \mu(X-1) + \frac{\nu(X-1)^2}{X-2} + \frac{\rho(X-1)^2}{X-3} \\
\frac{1+1}{(1-2)(1-3)} &= \lambda \\
\frac{2}{2} &= \lambda \\
\lambda &= 1
\end{aligned}$$

Pour obtenir μ, on dérive l'expression, puis on évalue en "$X=1$" :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dX}\left(\frac{X+1}{(X-2)(X-3)}\right) &= \mu + \underbrace{\dots}_{=0 \text{ quand évalué en } 1} \\
\frac{(X-2)(X-3)-(X+1)(2X-5)}{(X-2)^2(X-3)^2} &= \mu + \dots \\
\frac{(1-2)(1-3)-(1+1)(2\cdot 1-5)}{(1-2)^2(1-3)^2} &= \mu \\
7 &= \mu
\end{aligned}$$

(g) $\frac{2+X^2}{(X+1)X^2(X-1)^2}$;
Posons :

$$A = X^2 + 2, \quad B = (X+1)\,X^2\,(X-1)^2, \quad Q = \frac{A}{B} = \frac{X^2+2}{(X+1)\,X^2\,(X-1)^2}.$$

Q est de degré -3, donc on écrit :

$$\exists \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma \in \mathbb{C} \quad Q = \frac{\lambda}{X^2} + \frac{\mu}{X} + \frac{\nu}{(X-1)^2} + \frac{\rho}{X-1} + \frac{\sigma}{X+1}.$$

Pour la racine simple $X = -1$:

$$\sigma = \frac{A(-1)}{(-1)^2\Big((-1)-1\Big)^2} = \frac{3}{1\cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

Pour le pôle double en $X = 0$, on multiplie par X^2 puis on évalue en 0 :

$$X^2 Q = \frac{X^2+2}{(X+1)(X-1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{A(0)}{(0+1)\,(0-1)^2} = 2.$$

Pour obtenir μ, on dérive et on évalue en 0 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\tfrac{X^2+2}{(X+1)(X-1)^2}\right)\Bigg|_{X=0} = \mu \quad \Longrightarrow \quad \mu = 2.$$

Pour le pôle double en $X = 1$, on multiplie par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 :

$$(X-1)^2 Q = \frac{X^2+2}{(X+1)\,X^2} \quad \Longrightarrow \quad \nu = \frac{A(1)}{(1+1)\,1^2} = \tfrac{3}{2}.$$

Sa dérivée en $X = 1$ donne ρ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\tfrac{X^2+2}{(X+1)X^2}\right)\Bigg|_{X=1} = \rho \quad \Longrightarrow \quad \rho = -\tfrac{11}{4}.$$

Donc la décomposition en éléments simples est :

$$Q = \frac{2}{X^2} + \frac{2}{X} + \frac{\frac{3}{2}}{(X-1)^2} - \frac{\frac{11}{4}}{X-1} + \frac{\frac{3}{4}}{X+1}.$$

(h) $\frac{1-X}{X(X+\pi)^2}$;
Posons :

$$A = 1 - X, \quad B = X\,(X+\pi)^2, \quad Q = \frac{A}{B}.$$

Q est de degré -1, donc on pose :

$$\exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C} \quad Q = \frac{\lambda}{X} + \frac{\mu}{X+\pi} + \frac{\nu}{(X+\pi)^2}.$$

Pour la racine simple $X = 0$:

$$\lambda = \frac{A(0)}{(0+\pi)^2} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Pour le pôle double en $X = -\pi$, on multiplie par $(X+\pi)^2$:

$$\nu = \lim_{X\to -\pi} (X+\pi)^2 Q = \frac{A(-\pi)}{-\pi} = -\frac{1+\pi}{\pi}.$$

Pour obtenir μ, on dérive $(X+\pi)^2 Q$ puis on évalue en $X = -\pi$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\Big((X+\pi)^2 Q\Big)\Big|_{X=-\pi} = \mu \quad \Longrightarrow \quad \mu = -\frac{1}{\pi^2}.$$

Donc la décomposition en éléments simples est :

$$Q = \frac{1}{\pi^2}\,\frac{1}{X} - \frac{1}{\pi^2}\,\frac{1}{X+\pi} - \frac{1+\pi}{\pi}\,\frac{1}{(X+\pi)^2}.$$

(i) $\frac{X^2+2}{(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3})}$;
Posons :

$$A = X^2+2, \quad B = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3}), \quad Q = \frac{A}{B}.$$

Q est de degré 0, donc on développe le dénominateur :

$$(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3}) = X^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})X - \sqrt{6}.$$

On réalise la division euclidienne de X^2+2 par $X^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})X-\sqrt{6}$:
Le quotient est 1.
Donc :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad Q = 1 + \frac{\lambda}{X-\sqrt{2}} + \frac{\mu}{X+\sqrt{3}}.$$

Par formule du cours :

$$\lambda = \frac{A(\sqrt{2})}{\big(\sqrt{2}-(-\sqrt{3})\big)} = \frac{(\sqrt{2})^2+2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 4(\sqrt{3}-\sqrt{2}),$$

$$\mu = \frac{A(-\sqrt{3})}{\big(-\sqrt{3}-\sqrt{2}\big)} = \frac{(-\sqrt{3})^2+2}{-(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = -\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 5(\sqrt{2}-\sqrt{3}).$$

Donc la décomposition en éléments simples est :

$$Q = 1 + \frac{4(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{X-\sqrt{2}} + \frac{5(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{X+\sqrt{3}}.$$

(j) $\frac{1}{(X-i)^2(X-1-i)^2}$.
Posons :

$$A = 1, \quad B = (X-i)^2(X-1-i)^2, \quad Q = \frac{A}{B} = \frac{1}{(X-i)^2(X-1-i)^2}.$$

Q est de degré -4, donc on écrit :

$$\exists \lambda, \mu, \nu, \rho \in \mathbb{C} \quad Q = \frac{\lambda}{(X-i)^2} + \frac{\mu}{X-i} + \frac{\nu}{(X-1-i)^2} + \frac{\rho}{X-1-i}.$$

Pour le pôle double en $X = i$:

$$\lambda = \lim_{X\to i}(X-i)^2Q = \frac{1}{(i-(1+i))^2} = 1,$$

$$\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\Big((X-i)^2Q\Big)\Big|_{X=i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\Big(\tfrac{1}{(X-1-i)^2}\Big)\Big|_{X=i} = -\frac{2}{(-1)^3} = 2.$$

Pour le pôle double en $X = 1+i$:

$$\nu = \lim_{X\to 1+i}(X-(1+i))^2Q = \frac{1}{((1+i)-i)^2} = 1,$$

$$\rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\Big((X-(1+i))^2Q\Big)\Big|_{X=1+i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\Big(\tfrac{1}{(X-i)^2}\Big)\Big|_{X=1+i} = -\frac{2}{1^3} = -2.$$

Donc la décomposition en éléments simples est :

$$Q = \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{2}{X-i} + \frac{1}{(X-1-i)^2} - \frac{2}{X-1-i}.$$

2. *Enoncé : Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante, pour* $n \geq 1$ *:*

$$F_n = \frac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(X-i)} = \frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$$

Posons :

$$A = n!, \qquad B = \prod_{i=0}^{n}(X-i), \qquad Q = \frac{A}{B} = \frac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(X-i)}$$

Q est de degré $-n$, donc pour $k \in [\![0,n]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que :

$$Q = \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k}{X-k}$$

Ce sont des pôles simples, on utilise la formule du cours :

$$\lambda_k = \frac{A(k)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(k-i)} = \frac{n!}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(k-i)}$$

Or :

$$\begin{aligned}\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(k-i) &= \prod_{i=0}^{k}-1(k-i) \times \prod_{i=k+1}^{n}(k-i)\\ &= k! \times (-1)^{n-k} \times \prod_{i=k+1}^{n}(i-k)\\ &= k! \times (-1)^{n-k} \times (n-k)!\end{aligned}$$

Donc :

$$\lambda_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times (-1)^{n-k} = \binom{n}{k} \times (-1)^{n-k}$$

Donc la décomposition en éléments simples est :

$$Q = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \times \frac{(-1)^{n-k}}{X-k}$$

▶ Applications calculatoires

3. *Enoncé : Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 2$:*
   (a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$;
   On a $\frac{1}{4\text{X}^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\text{X}-1} - \frac{1}{2\text{X}+1}\right)$. Ainsi la somme voulue vaut :
   $$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$
   (b) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$;
   Si l'on considère la fraction rationnelle $\frac{1}{(X-1)X(X+1)}$, alors
   $$\frac{1}{(X-1)X(X+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{1}{2(X-1)}$$
   Ainsi,
   $$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)} = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)$$
   Donc
   $$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(2-1)}\right) \text{ par télescopage} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$
   (c) $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$.
   On remarque que
   $$\frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k+1}\right)$$
   Par télescopage, on obtient que cette somme vaut $-\frac{2}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3}$.

4. *Enoncé : Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'ensemble $ad - hoc$:*
   (a) $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$;
   On écrit que, $\frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{1}{2(X+1)}$, donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$ est
   $$x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|$$
   (b) $x \mapsto \frac{1}{(1-2x)^3}$;
   Il s'agit d'une primitive classique ; on trouve $x \mapsto \frac{1}{4(1-2x)^2}$.

(c) $x \mapsto \frac{1}{x^2+2}$;
On écrit que, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

de primitive $x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

(d) $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$;
L'idée pour primitiver cet élément simple est d'utiliser une forme canonique afin de se ramener à arctan :
$\frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\frac{4}{3}\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$.
Ainsi, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ est $x \longmapsto \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(e) $x \mapsto \frac{x}{x^2+2x+3}$;
L'idée est de faire apparaitre $\frac{u'}{u}$:

$$\frac{x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{1}{x^2+2x+3}$$

Or, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|$. De plus,

$$\frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

de primitive $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$. Donc une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+2x+3}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

(f) $x \mapsto \frac{x^4}{(x-1)(x-2)(x+1)}$;
La décomposition en éléments simples de $\frac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)}$ est
$\frac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)} = X+2+\frac{1}{6(X+1)} - \frac{1}{2(X-1)} + \frac{16}{3(X-2)}$
donc $x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{6}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{16}{3}\ln|x-2|$.

(g) $x \mapsto \frac{x}{(x^2+2)(x+1)}$;
On trouve $x \mapsto \frac{1}{6}\ln(x^2+2) - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

(h) $x \mapsto \frac{x-2}{(x+1)^2(x-1)^2}$.
On trouve $x \mapsto \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

5. *Enoncé : Règles de Bioche. Calculer les intégrales suivantes à l'aide des changements de variables proposés.*

(a) $\int_0^\pi \frac{\sin(t)\mathrm{d}t}{4-\cos(t)^2}$ en posant $u = \cos(t)$;
Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2} \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\left([\ln(2+u)]_{-1}^{1} - [\ln(2-u)]_{-1}^{1}\right) = \frac{1}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

(b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^3}$ en posant $u = \sin(t)$;
Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$\mathrm{J} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t \ \mathrm{d}t}{1-\cos^2 t}$$

Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} &= -\int_{0}^{\cos x} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\cos x}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left([\ln(1-u)]_{0}^{\cos x} - [\ln(u+1)]_{0}^{\cos x}\right) \\
&= \frac{1}{2}(\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

car pour $x \in]0,\pi\left[, \tan\frac{x}{2} > 0\right.$.

(c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$ pour $x \in]\,0,\pi[$ en posant $u = \cos(t)$;
Notons K l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$\mathrm{K} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \ \mathrm{d}t}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}$$

Le changement de variable $u = \sin t$ fournit donc

$$\mathrm{K} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\left(1-u^2\right)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{(u-1)^2}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\left(\left[\frac{1}{u-1}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{1}{u+1}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \\
&= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

(d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)+\cos(t)}$ en posant $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Notons L l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ nous livre et les formules de paramétrage du cercle vu dans le TD de trigonométrie donnent :

$$\mathrm{L} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2+2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned}\mathrm{K} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{u+\sqrt{2}-1} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left([\ln(u+\sqrt{2}-1)]_0^1 - \left[\ln(1+\sqrt{2}-u\right]_0^1\right) \\ &= \sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})\end{aligned}$$

▶ Dérivée logarithmique

6. *Enoncé : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et de racines (comptées avec multiplicité) $x_1, \ldots, x_n$ et soit $a \in \mathbb{C}\setminus\{x_1, \ldots, x_n\}$. Calculer les sommes suivantes :*
   (a) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a-x_i}$;
   Posons :
   $$P = c\prod_{i=1}^n (X - x_i)$$
   Donc par dérivée logarithmique :
   $$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X-x_i}$$
   Donc en évaluant en $X = a$:
   $$\frac{P'(a)}{P(a)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a-x_i}$$
   (b) $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a-x_i}$; On a :
   $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a-x_i} &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{-x_i}{a-x_i}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^n \left(\frac{a-x_i}{a-x_i} - \frac{a}{a-x_i}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{a-x_i}{a-x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{a}{a-x_i} \\ &= -n + a\sum_{i=1}^n \frac{1}{a-x_i} \\ &= -n + a\frac{P'(a)}{P(a)}\end{aligned}$$

(c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a-x_i)^2}$.

Par dérivée logarithmique, on a :

$$\left(\frac{P'}{P}\right)' = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a-x_i)^2}$$
$$\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''P-(P')^2}{P^2}$$

Donc en évaluant en $X = a$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a-x_i)^2} = -\frac{P''(a)P(a)-(P'(a))^2}{(P(a))^2}$$

7. *Enoncé : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1 < \ldots < x_n$ et soit $a \in \mathbb{R}_-^*$.*

(a) *Démontrer que la fonction rationnelle f associée à $\frac{P'}{P}$ vérifie les propriétés suivantes :*

- $\exists! y_0 \in]-\infty, x_1[, f(y_0) = a$;
- $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \exists! y_k \in]x_k, x_{k+1}[, f(y_k) = a$.

P est scindé à racines simples, donc posons :

$$P = c\prod_{k=1}^{n}(X-x_k) \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Soit $a \in \mathbb{R}_-^*$, posons $\mathrm{E} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ et :

$$f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{P'(x)}{P(x)}$$

Donc par dérivée logarithmique, on a :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-x_k}$$

Considérons la fonction :

$$g : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) - a$$

g est dérivable, donc continue sur E, et on a :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad g'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-x_k)^2} < 0$$

Donc g est strictement décroissante sur E.

Si l'on réalise l'étude sur $]-\infty, x_1[$, on a :

$$g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 - a > 0$$

Donc par définition de la limite :

$$\exists X \in]-\infty, x_1[\quad g(X) \in]-\frac{a}{2}, -a$$

Donc $g(X) > 0$
Au voisinage de x_1 :

$$g(x) \xrightarrow[x \to x_1^-]{} -\infty$$

Donc par définition de la limite :

$$\exists Y \in]X, x_1[\quad g(Y) < -\frac{71}{\pi^2}$$

Donc $g(Y) < 0$
Donc : $\begin{cases} g \in \mathrm{C}^0([X, Y]) \\ g(X)g(Y) < 0 \\ g \text{ est strictement décroissante sur } [X, Y] \end{cases}$
Donc par corollaire du TVI : $\exists! y_0 \in]X, Y[\quad g(y_0) = 0$.
Et comme $]X, Y[\subset]-\infty, x_1[$, on a :

$$\exists! y_0 \in]-\infty, x_1[\quad f(y_0) = a$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$g(x) \xrightarrow[x \to x_k^+]{} +\infty$$

$$g(x) \xrightarrow[x \to x_{k+1}^-]{} -\infty$$

Donc similairement, $\exists X, Y \in]x_k, x_{k+1}[\quad X < Y, g(X) > 0, g(Y) < 0$.
Donc par corollaire du TVI : $\exists! y_k \in]X, Y[\quad g(y_k) = 0$.
Et comme $]X, Y[\subset]x_k, x_{k+1}[$, on a :

$$\exists! y_k \in]x_k, x_{k+1}[\quad f(y_k) = a$$

(b) *En déduire que le polynôme $P' - aP$ est scindé à racines simples.*
$\forall k \in [\![0, n+1]\!]$, on a :

$$f(y_k) = a$$
$$\frac{P'(y_k)}{P(y_k)} = a$$

Donc :

$$(P' - aP)(y_k) = 0$$
$$\deg(P' - aP) = n$$

Donc :

$$\underbrace{\prod_{k=0}^{n-1}(x - y_k)}_{\deg(P)} \mid \underbrace{(P' - aP)}_{\deg(P'-aP)=n}$$

Donc :

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad P' - aP = c\prod_{k=0}^{n-1}(x - y_k)$$

8. *Enoncé : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$.*

   (a) *Justifier que si on pose $a_i = \frac{1}{P'(x_i)}$ on a-*

   $$\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{X - x_i}$$

   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$.
   Posons :

   $$P = c\prod_{k=1}^{n}(X - x_k) \text{ avec } c \in \mathbb{C}$$

   On a $\deg(P) = n \geq 1$
   Donc $\frac{1}{P} \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(\frac{1}{P}) = -n < 0$
   Tous les pôles sont simples, donc par DES :

   $$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{P'(X_k)}}{X - x_k}$$

   (b) *Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors on a :*

   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$$

   On suppose $P(0) \neq 0$.

   $$\frac{1}{P(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{0 - x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\frac{1}{P'(x_k)}}{x_k}$$

   Donc :

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$$

   (c) *Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-2$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{Q(x_i)}{P'(x_i)}$ lorsque $P(0) \neq 0$.*

   Supposons $P(0) \neq 0$.

On a : $\deg(\frac{Q}{p}) \leq n-2-n=-2<0$

Donc $E(\frac{Q}{P})=0$ et comme tout les pôles sont simples, par DES :

$$\frac{Q}{P}=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(x_k)}{P'(x_k)}\cdot\frac{1}{X-x_k}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1,\dots,x_n\}$:

$$\underbrace{x\frac{Q(x)}{P(x)}}_{<0 \text{ et } \xrightarrow[x\to+\infty]{}0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(x_k)}{P'(x_k)}\cdot\underbrace{\frac{x}{x-x_k}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1}$$

Donc en passant à la limite :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(x_k)}{P'(x_k)}=0$$

▶ Approfondissement

9. *Enoncé : Existe-t-il une fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ telle que $F'=\dfrac{1}{X}$?*

   Supposons par l'absurde qu'il existe $F \in \mathbb{K}(X)$ telle que $F'=\frac{1}{X}$. Quitte à factoriser "maximalement" X au numérateur et au dénominateur on peut écrire R sous la forme

$$\mathrm{F}=\frac{\mathrm{X}^m\ \mathrm{A}}{\mathrm{B}}$$

   où $m \in \mathbb{Z},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{A}(0)\neq 0,\ \mathrm{B}(0)\neq 0$. Alors on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{X}}=\left(\frac{\mathrm{X}^m\ \mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)'&=\frac{\left(m\mathrm{X}^{m-1}\ \mathrm{A}+\mathrm{X}^m\ \mathrm{A}'\right)\mathrm{B}-\mathrm{X}^m\mathrm{A}\mathrm{B}'}{\mathrm{B}^2}\\&=\frac{\mathrm{X}^{m-1}\left(m\mathrm{AB}+\mathrm{X}\left(\ \mathrm{A}'\mathrm{B}-\mathrm{A}\mathrm{B}'\right)\right)}{\mathrm{B}^2}\end{aligned}$$

   ou encore

$$\mathrm{B}^2=\mathrm{X}^m\left(m\mathrm{AB}+\mathrm{X}\left(\ \mathrm{A}'\mathrm{B}-\mathrm{A}\mathrm{B}'\right)\right)$$

   — Si $m=0$, alors $\mathrm{B}^2=\mathrm{X}\left(\mathrm{A}'\mathrm{B}-\mathrm{A}\mathrm{B}'\right)$, d'où $\mathrm{B}(0)^2=0$. Contradiction.
   — Si $m>0$, alors on a aussi $\mathrm{B}(0)^2=0$. Contradiction.
   — Si $m<0$, alors la contradiction est que le polynôme B^2 possède un pôle d'ordre $-m$ en 0 . En effet, ce pôle ne se "simplifie" pas car pour le numérateur on a

$$\left(m\mathrm{AB}+\mathrm{X}\left(\ \mathrm{A}'\mathrm{B}-\mathrm{A}\mathrm{B}'\right)\right)(0)=m\ \mathrm{A}(0)\mathrm{B}(0)\neq 0$$

10. *Enoncé :*

(a) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Quel est son degré ?

On a :

$$\begin{aligned} e^{ni\theta} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k\theta \cos^{n-k}\theta \\ &= \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}\theta\cos^{n-2k}\theta + i \sum_{0\leq 2k+1} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k}\theta \cos^{n-2k-1}\theta \\ &= \cos n\theta + i\sin n\theta \end{aligned}$$

et donc

$$\cos n\theta = \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}\theta\cos^{n-2k}\theta = \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} \left(\cos^2\theta - 1\right)^k \cos^{n-2k}\theta$$

Il suffit donc de prendre $\mathrm{T}_n = \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} \left(\mathrm{X}^2 - 1\right)^k \mathrm{X}^{n-2k}$.

Démontrons l'unicité. Supposons qu'il existe deux polynômes T_n et $\tilde{T}_n$ vérifiant la condition de l'énoncé. Comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$, T_n et $\tilde{\mathrm{T}}_n$ coïncident sur $[-1,1]$ qui est un ensemble infini. Donc $\mathrm{T}_n = \tilde{\mathrm{T}}_n$.

Chaque terme de la somme définissant T_n est degré n et de coefficient dominant $\binom{n}{2k}$. La somme de ces coefficients étant non nulle, on en déduit que $\deg \mathrm{T}_n = n$.

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines de T_n ?*

Remarquons que $\cos n\theta$ s'annule pour $\theta = \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a donc $\mathrm{T}_n(\cos\theta_k) = 0$. Pour $0 \leq k \leq n-1, \theta_k \in [0,\pi]$ et cos est injective sur $[0,\pi]$, ce qui prouve que les $x_k = \cos\theta_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$ sont n racines distinctes de T_n. Or $\deg \mathrm{T}_n = n$. Les x_k pour $0 \leq k \leq n-1$ sont donc exactement les racines de T_n.

(c) *Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{T_n}$.*

Pour $n = 0$, $\mathrm{T}_0 = 1$. Donc $\frac{1}{\mathrm{T}_0} = 1$. Supposons $n \geq 1$. Alors $\deg \frac{1}{\mathrm{T}_n} < 0$ et la partie entière de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ est nulle. Tous les pôles de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ sont simples et le coefficient de $\frac{1}{\mathrm{X}-x_k}$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ est $\frac{1}{\mathrm{T}_n'(x_k)}$. Dérivons l'identité $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. On obtient $-\mathrm{T}_n'(\cos\theta)\sin\theta = -n\sin n\theta$. On a donc $\mathrm{T}_n'(x_k)\sin\theta_k = n\sin n\theta_k$. Or pour $0 \leq k \leq n-1, \theta_k \in]0,\pi[$ donc $\sin\theta_k \neq 0$ et $\sin n\theta_k = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$. On en déduit $\mathrm{T}_n'(x_k) = \frac{(-1)^k n}{\sin\theta_k}$. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ est donc

$$\frac{1}{\mathrm{T}_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin\theta_k}{\mathrm{X} - \cos\theta_k}$$

11. *Enoncé : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

(a) *Montrer qu'il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{C}[X]$ tel que :*

$$A_n\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^n + \frac{1}{X^n}$$

On montre l'existence par récurrence double. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence :
«Il existe un polynôme $\mathrm{A}_n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}_n\left(\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{X}^n + \frac{1}{\mathrm{X}^n}$. » HR(0) et HR(1) sont vaies : il suffit de prendre $\mathrm{A}_0 = 2$ et $\mathrm{A}_1 = \mathrm{X}$. Supposons HR($n$) et HR($n$+1) pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $\mathrm{X}^{n+2}+\frac{1}{\mathrm{X}^{n+2}} = \left(\mathrm{X}^{n+1}+\frac{1}{\mathrm{X}^{n+1}}\right)\left(\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}\right) - \left(\mathrm{X}^n + \frac{1}{\mathrm{X}^n}\right)$. Il suffit donc de prendre $\mathrm{A}_{n+2} = \mathrm{X}\mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_n \cdot$ HR$(n+2)$ est donc vraie et on conclut par récurrence double.
Supposons qu'il existe deux polynômes A_n et $\tilde{\mathrm{A}}_n$ vérifiant la conidtion de l'énoncé. Comme l'application $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ est surjective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, les polynômes A_n et $\tilde{\mathrm{A}}_n$ coïncident sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble infini. Donc $\mathrm{A}_n = \tilde{\mathrm{A}}_n$.

(b) *Montrer que les racines de A_n sont :*

$$x_k = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n-1.$$

Les racines de l'équation $z^n + \frac{1}{z^n} = 0$ sont les racines $2N^{\text{èmes}}$ de -1 , à savoir les $z_k = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$ pour $0 \leq k \leq 2n-1$. On en déduit que les $x_k = z_k + \frac{1}{z_k}$ sont des racines de A_n. On trouve alors $x_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0,\pi]$ et cos est injective sur $[0,\pi]$: les x_k pour $0 \leq k \leq n-1$ sont donc deux à deux distincts. A_n possède donc n racines distinctes. Or l'égalité définissant A_n montre que A_n est de degré n. Les x_k pour $0 \leq k \leq n-1$ sont donc exactement les racines de A_n.

(c) *Décomposer $\dfrac{1}{A_n}$ en éléments simples.*

Pour $n = 0$, $\frac{1}{\mathrm{A}_0} = \frac{1}{2}$. Supposons $n \geq 1$. Alors $\deg \frac{1}{\mathrm{A}_n} < 0$. La fraction rationnelle $\frac{1}{\mathrm{A}_n}$ admet donc une partie entière nulle. De plus, tous les pôles de $\frac{1}{\mathrm{A}_n}$ sont simples et le coefficient de $\frac{1}{\mathrm{X}-x_k}$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\mathrm{A}_n}$ est $\frac{1}{\mathrm{A}'_n(x_k)}$. En dérivant l'identité $\mathrm{A}_n\left(\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{X}^n + \frac{1}{\mathrm{X}^n}$, on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{\mathrm{X}^2}\right)\mathrm{A}'_n\left(\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = n\left(\mathrm{X}^{n-1} - \frac{1}{\mathrm{X}^{n+1}}\right)$$

En substituant z_k à X et en utilisant le fait que $x_k = z_k + \frac{1}{z_k}$, on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{z_k^2}\right)\mathrm{A}'_n(x_k) = n\left(z_k^{n-1} - \frac{1}{z_k^{n+1}}\right)$$

Comme les z_k sont des racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1, $z_k^2 \neq 1$ et donc $1 - \frac{1}{z_k^2} \neq 0$. De plus, $z_k^n = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2}} = (-1)^k i$. Ainsi

$$\mathrm{A}'_n(x_k) = \frac{2(-1)^k i}{z_k}\frac{1}{1-\frac{1}{z_k^2}} = \frac{2n(-1)^k i}{z_k - \frac{1}{z_k}} = \frac{(-1)^k n}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\mathrm{A}_n}$ est donc :

$$\frac{1}{\mathrm{A}_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k \sin\theta_k}{\mathrm{X} - 2\cos\theta_k}$$

avec $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$

12. *Enoncé : Soient $n \geq 2$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n}(X-k)$.*
    (a) *En considérant $f_n = \dfrac{P_n'}{P_n}$, montrer que P_n' admet une unique racine x_n dans $]0,1[$.*
    On a $f_n :\mapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-k}$; f_n est donc continue sur $]0,1[$ et f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ comme somme de fonctions strictement décroissantes sur $]0,1[$. De plus, $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = -\infty$. Donc (exercice classique) f_n s'annule une unique fois sur $]0,1[$. Par conséquent, P_n' s'annule une unique fois sur $]0,1[$.

    (b) *Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers 0.*
    Posons $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Puisque $f_n(x_n) = 0$,

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k - x_n}$$

    Puisque $0 < x_n < 1$, $\frac{1}{x_n} > H_n$. Il est classique de montrer que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n} = +\infty$ puis $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

    (c) *Montrer que $x_n\ln(n) \to 1$.*
    À nouveau,

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-x_n}$$

    Puisque $x_n < 1$,

$$\mathrm{H}_n < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} = \frac{1}{1-x_n} + \mathrm{H}_{n-1} = \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{n} + \mathrm{H}_n$$

    Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{H}_n = +\infty$

$$\frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{n} + \mathrm{H}_n$$

    On en déduit que $H_n x_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1$. Il est classique de montrer que $\frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1$ d'où le résultat.