TD 15

Applications calculatoires

3. (a) On a $\frac{1}{4\mathrm{X}^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\mathrm{X}-1} - \frac{1}{2\mathrm{X}+1}\right)$. Ainsi la somme voulue vaut :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

(b) Si l'on considère la fraction rationnelle $\frac{1}{(X-1)X(X+1)}$, alors

$$\frac{1}{(X-1)X(X+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{1}{2(X-1)}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k-1)} = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(2-1)}\right) \text{ par télescopage} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(c) On remarque que

$$\frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+2} - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k+1}\right)$$

Par télescopage, on obtient que cette somme vaut $-\frac{2}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3}$.

4. (a) On écrit que, $\frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{2(X-1)} - \frac{1}{2(X+1)}$, donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{1+x}\right|$$

(b) Il s'agit d'une primitive classique ; on trouve $x \mapsto \dfrac{1}{4(1-2x)^2}$.

(c) On écrit que, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^2+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

de primitive $x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

(d) L'idée pour primitiver cet élément simple est d'utiliser une forme canonique afin de se ramener à arctan :

$$\frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\frac{4}{3}\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

Ainsi, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ est $x \longmapsto \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(e) L'idée est de faire apparaitre $\frac{u'}{u}$:

$$\frac{x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{1}{x^2+2x+3}$$

Or, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|$. De plus,

$$\frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

de primitive $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$. Donc une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+2x+3}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

(f) La décomposition en éléments simples de $\frac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)}$ est

$$\frac{X^4}{(X-1)(X-2)(X+1)} = X+2+\frac{1}{6(X+1)} - \frac{1}{2(X-1)} + \frac{16}{3(X-2)}$$

donc $x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{6}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{16}{3}\ln|x-2|$.

(g) On trouve $x \mapsto \frac{1}{6}\ln(x^2+2) - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

(h) On trouve $x \mapsto \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

6. (a) Notons I l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2} \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\left([\ln(2+u)]_{-1}^{1} - [\ln(2-u)]_{-1}^{1}\right) = \frac{1}{2}\ln 3 \end{aligned}$$

(b). Notons J l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$\mathrm{J} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t \ \mathrm{d}t}{1-\cos^2 t}$$

Le changement de variable $u = \cos t$ donne

$$\begin{aligned} \mathrm{J} &= -\int_{0}^{\cos x} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\cos x}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left([\ln(1-u)]_0^{\cos x} - [\ln(u+1)]_0^{\cos x}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\tan^2\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

car pour $x \in]0,\pi[$, $\tan\frac{x}{2} > 0$.

(c) Notons K l'intégrale à calculer. Remarquons que

$$\mathrm{K} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t \ \mathrm{d}t}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}$$

Le changement de variable $u = \sin t$ fournit donc

$$\mathrm{K} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)^2}$$

Une décomposition en éléments simples donne ensuite

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\left(\left[\frac{1}{u-1}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - [\ln(1-u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\frac{1}{u+1}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(1+u)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \\
&= \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

(d) Notons L l'intégrale à calculer. Le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ nous livre et les formules de paramétrage du cercle vu dans le TD de trigonométrie donnent :

$$\mathrm{L} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2+2u}$$

Une décomposition en éléments simples donne alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{u+\sqrt{2}-1} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left([\ln(u+\sqrt{2}-1)]_0^1 - \left[\ln(1+\sqrt{2}-u\right]_0^1\right) \\
&= \sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Approfondissements

9. Supposons par l'absurde qu'il existe $\mathrm{F} \in \mathbb{K}(\mathrm{X})$ telle que $\mathrm{F}' = \frac{1}{\mathrm{X}}$. Quitte à factoriser "maximalement" X au numérateur et au dénominateur on peut écrire R sous la forme

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{X}^m\ \mathrm{A}}{\mathrm{B}}$$

où $m \in \mathbb{Z},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \mathrm{A}(0) \neq 0,\ \mathrm{B}(0) \neq 0$. Alors on trouve

$$\frac{1}{\mathrm{X}} = \left(\frac{\mathrm{X}^m\ \mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)' = \frac{\left(m\mathrm{X}^{m-1}\ \mathrm{A} + \mathrm{X}^m\ \mathrm{A}'\right)\mathrm{B} - \mathrm{X}^m\mathrm{AB}'}{\mathrm{B}^2}$$
$$= \frac{\mathrm{X}^{m-1}\left(m\mathrm{AB} + \mathrm{X}\left(\ \mathrm{A}'\mathrm{B} - \mathrm{AB}'\right)\right)}{\mathrm{B}^2}$$

ou encore

$$\mathrm{B}^2 = \mathrm{X}^m\left(m\mathrm{AB} + \mathrm{X}\left(\ \mathrm{A}'\mathrm{B} - \mathrm{AB}'\right)\right)$$

— Si $m = 0$, alors $\mathrm{B}^2 = \mathrm{X}\,(\mathrm{A}'\mathrm{B} - \mathrm{AB}')$, d'où $\mathrm{B}(0)^2 = 0$. Contradiction.
— Si $m > 0$, alors on a aussi $\mathrm{B}(0)^2 = 0$. Contradiction.
— Si $m < 0$, alors la contradiction est que le polynôme B^2 possède un pôle d'ordre $-m$ en 0 . En effet, ce pôle ne se "simplifie" pas car pour le numérateur on a

$$\left(m\mathrm{AB} + \mathrm{X}\left(\ \mathrm{A}'\mathrm{B} - \mathrm{AB}'\right)\right)(0) = m\ \mathrm{A}(0)\mathrm{B}(0) \neq 0.$$

10. (a) On a :

$$e^{ni\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \sin^k\theta\cos^{n-k}\theta$$
$$= \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}(-1)^k\sin^{2k}\theta\cos^{n-2k}\theta + i\sum_{0\leq 2k+1}\binom{n}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k}\theta\cos^{n-2k-1}\theta$$
$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$

et donc

$$\cos n\theta = \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}(-1)^k\sin^{2k}\theta\cos^{n-2k}\theta = \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}\left(\cos^2\theta - 1\right)^k\cos^{n-2k}\theta$$

Il suffit donc de prendre $\mathrm{T}_n = \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}\left(\mathrm{X}^2 - 1\right)^k\mathrm{X}^{n-2k}$.

Démontrons l'unicité. Supposons qu'il existe deux polynômes T_n et $\tilde{T}_n$ vérifiant la condition de l'énoncé. Comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, T_n et $\tilde{\mathrm{T}}_n$ coïncident sur $[-1, 1]$ qui est un ensemble infini. Donc $\mathrm{T}_n = \tilde{\mathrm{T}}_n$.
Chaque terme de la somme définissant T_n est degré n et de coefficient dominant $\binom{n}{2k}$. La somme de ces coefficients étant non nulle, on en déduit que $\deg \mathrm{T}_n = n$.
(b) Remarquons que $\cos n\theta$ s'annule pour $\theta = \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On a

donc $\mathrm{T}_n(\cos\theta_k) = 0$. Pour $0 \leq k \leq n-1, \theta_k \in [0, \pi]$ et cos est injective sur $[0, \pi]$, ce qui prouve que les $x_k = \cos\theta_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$ sont n racines distinctes de T_n. Or deg $\mathrm{T}_n = n$. Les x_k pour $0 \leq k \leq n-1$ sont donc exactement les racines de T_n.
(c) Pour $n = 0,\ \mathrm{T}_0 = 1$. Donc $\frac{1}{\mathrm{T}_0} = 1$. Supposons $n \geq 1$. Alors deg $\frac{1}{\mathrm{T}_n} < 0$ et la partie entière de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ est nulle. Tous les pôles de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ sont simples et le coefficient de $\frac{1}{\mathrm{X}-x_k}$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ est $\frac{1}{\mathrm{T}_n'(x_k)}$. Dérivons l'identité $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. On obtient $-\mathrm{T}_n'(\cos\theta)\sin\theta = -n\sin n\theta$. On a donc $\mathrm{T}_n'(x_k)\sin\theta_k = n\sin n\theta_k$. Or pour $0 \leq k \leq n-1, \theta_k \in]0, \pi[$ donc $\sin\theta_k \neq 0$ et $\sin n\theta_k = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$. On en déduit $\mathrm{T}_n'(x_k) = \frac{(-1)^k n}{\sin\theta_k}$. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\mathrm{T}_n}$ est donc

$$\frac{1}{\mathrm{T}_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin\theta_k}{\mathrm{X} - \cos\theta_k}$$

11. (a) On montre l'existence par récurrence double. Soit HR(n) l'hypothèse de récurrence :
«Il existe un polynôme $\mathrm{A}_n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A}_n\left(\mathrm{X} + \frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{X}^n + \frac{1}{\mathrm{X}^n}$.»
HR(0) et HR(1) sont vaies : il suffit de prendre $\mathrm{A}_0 = 2$ et $\mathrm{A}_1 = \mathrm{X}$. Supposons HR($n$) et HR($n+1$) pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $\mathrm{X}^{n+2} + \frac{1}{\mathrm{X}^{n+2}} = \left(\mathrm{X}^{n+1} + \frac{1}{\mathrm{X}^{n+1}}\right)\left(\mathrm{X} + \frac{1}{\mathrm{X}}\right) - \left(\mathrm{X}^n + \frac{1}{\mathrm{X}^n}\right)$. Il suffit donc de prendre $\mathrm{A}_{n+2} = \mathrm{X}\mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_n \cdot$ HR($n+2$) est donc vraie et on conclut par récurrence double.
Supposons qu'il existe deux polynômes A_n et $\tilde{\mathrm{A}}_n$ vérifiant la conidtion de l'énoncé. Comme l'application $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est surjective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, les polynômes A_n et $\tilde{\mathrm{A}}_n$ coïncident sur $\mathbb{R}$ qui est un ensemble infini. Donc $\mathrm{A}_n = \tilde{\mathrm{A}}_n$.

(b) Les racines de l'équation $z^n + \frac{1}{z^n} = 0$ sont les racines $2N^{\text{èmes}}$ de -1 , à savoir les $z_k = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$ pour $0 \leq k \leq 2n-1$. On en déduit que les $x_k = z_k + \frac{1}{z_k}$ sont des racines de A_n. On trouve alors $x_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et cos est injective sur $[0, \pi]$: les x_k pour $0 \leq k \leq n-1$ sont donc deux à deux distincts. A_n possède donc n racines distinctes. Or l'égalité définissant A_n montre que A_n est de degré n. Les x_k pour $0 \leq k \leq n-1$ sont donc exactement les racines de A_n.

(c) Pour $n = 0$, $\frac{1}{\mathrm{A}_0} = \frac{1}{2}$. Supposons $n \geq 1$. Alors deg $\frac{1}{\mathrm{A}_n} < 0$. La fraction rationnelle $\frac{1}{\mathrm{A}_n}$ admet donc une partie entière nulle. De plus, tous les pôles de $\frac{1}{\mathrm{A}_n}$ sont simples et le coefficient de $\frac{1}{\mathrm{X}-x_k}$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\mathrm{A}_n}$ est $\frac{1}{\mathrm{A}_n'(x_k)}$. En dérivant l'identité $\mathrm{A}_n\left(\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{X}^n+\frac{1}{\mathrm{X}^n}$, on obtient

$$\left(1-\frac{1}{\mathrm{X}^2}\right)\mathrm{A}_n'\left(\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}\right)=n\left(\mathrm{X}^{n-1}-\frac{1}{\mathrm{X}^{n+1}}\right)$$

En substituant z_k à X et en utilisant le fait que $x_k=z_k+\frac{1}{z_k}$, on obtient

$$\left(1-\frac{1}{z_k^2}\right)\mathrm{A}_n'\left(x_k\right)=n\left(z_k^{n-1}-\frac{1}{z_k^{n+1}}\right)$$

Comme les z_k sont des racines $2n^{\text{èmes}}$ de -1, $z_k^2\neq 1$ et donc $1-\frac{1}{z_k^2}\neq 0$. De plus, $z_k^n=e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2}}=(-1)^k i$. Ainsi

$$\mathrm{A}_n'\left(x_k\right)=\frac{2(-1)^k i}{z_k}\frac{1}{1-\frac{1}{z_k^2}}=\frac{2n(-1)^k i}{z_k-\frac{1}{z_k}}=\frac{(-1)^k n}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$$

La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\mathrm{A}_n}$ est donc :

$$\frac{1}{\mathrm{A}_n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\sin\theta_k}{\mathrm{X}-2\cos\theta_k}$$

avec $\theta_k=\frac{(2k+1)\pi}{2n}$

12. (a) On a $f_n :\mapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-k}$; f_n est donc continue sur $]0,1[$ et f_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ comme somme de fonctions strictement décroissantes sur $]0,1[$. De plus, $\lim_{x\to 0^+} f_n(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to 1^-} f_n(x)=-\infty$. Donc (exercice classique) f_n s'annule une unique fois sur $]0,1[$. Par conséquent, P_n' s'annule une unique fois sur $]0,1[$.

    (b) Posons $\mathrm{H}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Puisque $f_n\left(x_n\right)=0$,

$$\frac{1}{x_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-x_n}$$

Puisque $0<x_n<1$, $\frac{1}{x_n}>H_n$. Il est classique de montrer que $\lim_{n\to+\infty}H_n=+\infty$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n}=+\infty$ puis $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$.

(c) À nouveau,

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-x_n}$$

Puisque $x_n < 1$,

$$\mathrm{H}_n < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = \frac{1}{1-x_n} + \mathrm{H}_{n-1} = \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{n} + \mathrm{H}_n$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{H}_n = +\infty$

$$\frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{n} + \mathrm{H}_n$$

On en déduit que $H_n x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$. Il est classique de montrer que $\dfrac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ d'où le résultat.