FRACTIONS RATIONNELLES

▶ Décomposition en éléments simples

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions suivantes :
   (a) $\dfrac{X^4-2}{X(X+1)(X+2)}$; (f) $\dfrac{X+1}{(X-1)^2(X-2)(X-3)}$;
   (b) $\dfrac{X^3+2}{(X-1)X(X+1)}$; (g) $\dfrac{2+X^2}{(X+1)X^2(X-1)^2}$;
   (c) $\dfrac{X^2}{(X-\pi)(X+\pi)}$; (h) $\dfrac{1-X}{X(X+\pi)^2}$;
   (d) $\dfrac{X+1}{(X+2)(X+e)}$; (i) $\dfrac{X^2+2}{(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3})}$;
   (e) $\dfrac{X^2+X+1}{(X-i)(X+i)(X-1)}$; (j) $\dfrac{1}{(X-i)^2(X-1-i)^2}$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante, pour $n \geq 1$:

$$F_n = \frac{n!}{\prod\limits_{i=0}^{n}(X-i)} = \frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} .$$

▶ Applications calculatoires

3. Calculer les sommes suivantes, pour $n \geq 2$:
   (a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$; (b) $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}$; (c) $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$.
4. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'ensemble *ad–hoc* :
   (a) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$; (d) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$; (g) $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+2)\,(x+1)}$;
   (b) $x \mapsto \dfrac{1}{(1-2x)^3}$; (e) $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+2x+3}$; (h) $x \mapsto \dfrac{x-2}{(x+1)^2(x-1)^2}$.
   (c) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2}$; (f) $x \mapsto \dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)(x+1)}$;
5. *Règles de Bioche.* Calculer les intégrales suivantes à l'aide des changements de variables proposés.
   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)\ \mathrm{d}t}{4-\cos(t)^2}$ en posant $u=\cos(t)$; (c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)^3}$ en posant $u=\sin(t)$;
   (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$ pour $x \in]0,\pi[$ en posant $u=\cos(t)$; (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)+\cos(t)}$ en posant $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

▶ Dérivée logarithmique

6. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et de racines (comptées avec multiplicité) $x_1,\dots,x_n$ et soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{x_1,\dots,x_n\}$. Calculer les sommes suivantes :
   (a) $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a-x_i}$;
   (b) $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{a-x_i}$;
   (c) $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{(a-x_i)^2}$.
7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1 < \ldots < x_n$ et soit $a \in \mathbb{R}_-^*$.
   (a) Démontrer que la fonction rationnelle f associée à $\dfrac{P'}{P}$ vérifie les propriétés suivantes :
      — $\exists! y_0 \in]-\infty, x_1[,\ f(y_0)=a$;

— $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\exists! y_k \in]x_k, x_{k+1}[$, $f(y_k) = a$.

(b) En déduire que le polynôme $P' - aP$ est scindé à racines simples.

8. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$.

   (a) Justifier que si on pose $a_i = \dfrac{1}{P'(x_i)}$ on a

$$\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{X - x_i} \ .$$

   (b) Montrer que si $P(0) \neq 0$ alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)} \ .$$

   (c) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-2$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{Q(x_i)}{P'(x_i)}$ lorsque $P(0) \neq 0$.

► Approfondissements

9. Existe–t–il une fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ telle que $F' = \dfrac{1}{X}$?

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{T}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \, .$$

   Quel est son degré ?

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; quelles sont les racines de T_n ?

   (c) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\mathrm{T}_n}$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{A}_n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\mathrm{A}_n\left(\mathrm{X} + \frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{X}^n + \frac{1}{\mathrm{X}^n} \, .$$

   (b) Montrer que les racines de A_n sont les $x_k = 2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

   (c) Décomposer $\dfrac{1}{\mathrm{A}_n}$ en éléments simples.

12. Soient $n \geq 2$ et $\mathrm{P}_n = \prod\limits_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - k)$.

   (a) En considérant $f_n = \dfrac{\mathrm{P}'_n}{\mathrm{P}_n}$, montrer que P'_n admet une unique racine x_n dans $]0, 1[$.

   (b) Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers 0 .

   (c) Montrer que $x_n \ln(n) \to 1$.