

## POLYNÔMES

## ► Arithmétique sur les polynômes

- Soit  $n \geq 2$ . Effectuer la division euclidienne de  $A$  par  $B$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , lorsque :
  - $A = X^3 + X^2 - X + 1, B = X - 1;$
  - $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, B = X^2 + X + 1;$
  - $A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1, B = X^3 + X^2 + 2;$
  - $A = X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}, B = X^2 + X + 1;$
  - $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n, B = X^3 - 2X + 1;$
  - $A = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2, B = (X - 2)^2;$
  - $A = X^n, B = X - 1.$
- Soit  $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$ .
  - Calculer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 1$ .
  - Calculer  $P(i)$ .
- Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .
  - Démontrer que  $P - X$  divise  $P^k - X^k$  pour tout  $k \geq 1$ .
  - En déduire que  $P - X$  divise  $P \circ P - P$ .
  - Conclure en démontrant que  $P - X$  divise  $P \circ P - X$ .
- Déterminer le pgcd des polynômes  $X^5 + X^3 + X^2 + 1$  et  $2X^3 + 1$ .
- Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  tels que  $a \neq b$  et soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ .
  - Soit  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(\cos \varphi + X \sin \varphi)^n$  par  $X^2 + 1$ .

## ► Racines

- Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}$ .
- Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide, non réduit à un point et  $f, g$  deux fonctions polynomiales telles que  $\forall x \in I, f(x)g(x) = 0$ . Démontrer que  $f = 0$  ou  $g = 0$ . Ce résultat s'applique-t-il aux fonctions non polynomiales ?
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les systèmes suivants :

$$(a) \quad \begin{cases} x + y & = 3 \\ x^2 + y^2 & = 5 \end{cases} ; \quad (b) \quad \begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} & = 1 \end{cases} .$$

- Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P(0) = 0$  et  $P(X^2 + 1) = P^2 + 1$ .
  - On considère la suite définie par récurrence par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$  pour  $n \geq 0$ . Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}, P(u_n) = u_n$ .
  - Que peut-on en déduire sur le polynôme  $P$  ?
- Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que :

$$(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^{n \wedge p} - 1.$$

- Soient  $x, y, z$  trois complexes non nuls tels que  $x + y + z = 0$  et  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ . Montrer que  $|x| = |y| = |z|$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le polynôme

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$$

possède-t-il une racine multiple ?

## ► Dérivation

13. Résoudre dans  $\mathbb{C}[X]$  l'équation  $P(3X) = P' + 5P''$ .
14. Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $P(1) = 1$ ,  $P'(1) = 0$ ,  $P''(1) = 3$  et  $P^{(n)}(1) = 0$  pour  $n \geq 3$ .
15. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(X - 1)^3$  divise le polynôme

$$P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

16. Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_k^{k+1} P(t) dt = k + 1.$$

17. Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Démontrer que

$$P(X+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}.$$

18. Déterminer tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.
19. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme scindé de degré  $n \geq 2$ . Démontrer que  $P'$  est scindé.

## ► Polynômes irréductibles

20. Décomposer en produit de facteurs irréductibles sur  $R$  les polynômes suivants :

- |                       |                                    |
|-----------------------|------------------------------------|
| (a) $X^3 + 1$ ;       | (f) $X^4 - X^2 - 12$ ;             |
| (b) $X^8 + 1$ ;       | (g) $X^6 + 1$ ;                    |
| (c) $X^4 + 1$ ;       | (h) $X^6 - 1$ ;                    |
| (d) $X^8 + X^4 + 1$ ; | (i) $X^{2n+1} - 1$ ( $n \geq 1$ ); |
| (e) $X^4 + X^2 + 1$ ; | (j) $1 + X^3 + X^6 + X^9$ .        |

21. On pose :

$$P = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1.$$

- (a) Vérifier que  $i$  est racine multiple de  $P$ .
- (b) En déduire la décomposition de  $P$  sur  $\mathbb{R}$ .
22. Démontrer que  $X^2 + X + 1$  divise  $X^8 + X^4 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
23. Quelle est la décomposition en produit d'irréductibles de  $X^8 - 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$  ?
24. Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme :

$$P = X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1.$$

## ► Approfondissements

25. On dit qu'un sous-groupe de  $\mathbb{K}[X]$  en est un *idéal* si  $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in I, PQ \in I$ .
- (a) Démontrer que pour tout  $A \in \mathbb{K}[X]$ ,  $A\mathbb{K}[X] = \{AP \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ .
- (b) On fixe dans cette question un idéal  $I$  de  $\mathbb{K}[X]$  différent de  $\{0\}$ .
- Justifier l'existence de  $r = \min\{\deg P \mid P \in I \setminus \{0\}\}$ .
  - Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire  $U \in I$  de degré  $r$ .
  - Démontrer que  $I = U\mathbb{K}[X]$ .
26. Soit  $(P, Q) \in \mathbb{Z}[X]^2$  tel que  $P \wedge Q = 1$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = P(n) \wedge Q(n)$ . Montrer que la suite  $(u_n)_n$  est périodique.
27. *Une somme de Newton.* Soient  $a, b$  et  $c$  les racines complexes du polynôme  $P = X^3 - 2X + 5$ .
- (a) Calculer  $S = a^4 + b^4 + c^4$ .
- (b) Trouver un polynôme de degré trois à coefficients entiers dont  $a^2, b^2$  et  $c^2$  sont les racines.

28. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Factoriser sur  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P_n = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$ .  
 (b) En déduire une expression simple de

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

- (c) Donner une expression simple de

$$B_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right).$$

- (d) On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Calculer

$$C_n = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{\ell \neq k} (\omega^k - \omega^\ell).$$

29. Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer les entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $X^2 - (a^2 + b^2)$  divise  $X^{2n} - (a^n + b^n)^2$ .  
 30. Soient  $P, Q$  deux polynômes unitaires de  $\mathbb{R}[X]$  à coefficients dans  $\mathbb{R}_+$  tels que :

$$PQ = \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

- (a) Donner un exemple non trivial de telle décomposition.  
 (b) Démontrer que les coefficients de  $P$  et  $Q$  sont dans  $\{0, 1\}$ .

## ► Exercices CCINP

- 85 1. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Donner sans démonstration la formule de Taylor polynomiale.  
 (b) Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . En déduire que :  $a$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $r$  si et seulement si  $P^{(r)}(a) \neq 0$  et  $\forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ ,  $P^{(k)}(a) = 0$ .

2. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  pour que 1 soit racine double du polynôme  $P = X^5 + aX^2 + bX$  et factoriser alors ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$ .

- 87 Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$   $n+1$  réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si  $b_0, b_1, \dots, b_n$  sont  $n+1$  réels quelconques, alors il existe un unique polynôme  $P$  vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(a_i) = b_i.$$

2. Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Expliciter ce polynôme  $P$ , que l'on notera  $L_k$ , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que  $\forall p \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$ .