ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

▶ Calculs de primitives

1. *Enoncé : Déterminer une primitive des expressions suivantes vues comme fonctions de la variable t :*

   (a) $\frac{e^t}{e^{2t}+1}$;

$$\int^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t = \int^x \frac{e^t}{1+(e^t)^2}\mathrm{d}t = \arctan(e^x)$$

   (b) $\sin(4t)$;

$$\int^x \sin(4t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\cos(4x)$$

   (c) $\frac{3}{(t+2)^3}$;

$$\int^x \frac{3}{(t+2)^3}\mathrm{d}t = \int^x 3\times(t+2)^{-3}\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}(x+2)^{-2}$$

   (d) $\frac{e^{1/t}}{t^2}$;

$$\int^x \frac{e^{1/t}}{t^2}\mathrm{d}t = -e^{1/x}$$

   (e) $\frac{t^3+1}{t+1}$;

$$\int^x \frac{t^3+1}{t+1}\mathrm{d}t = \int^x (t^2-t+1)\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

   (f) $\cos(t)e^{\sin(t)}$;

$$\int^x \cos(t)e^{\sin(t)}\mathrm{d}t = e^{\sin(x)}$$

   (g) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$;

$$\int^x \left(\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}\right)\mathrm{d}t = \int^x (1+t)^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - \frac{3}{4}x^{4/3}$$

   (h) $\frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$;

$$\int^x \frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}\mathrm{d}t = \int^x 7t\times(1+7t^2)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}(1+7x^2)^{\frac{2}{3}}$$

   (i) $\frac{t^2+t+1}{t^2}$;

$$\int^x \frac{t^2+t+1}{t^2}\mathrm{d}t = \int^x \left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = x + \ln|x| - \frac{1}{x}$$

   (j) $\frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}$;

$$\int^x \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arcsin^2(x)$$

(k) $\frac{t^3}{t+1}$;

$$\int^x \frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t = \int^x \frac{t^3+1}{t+1} - \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1|.$$

(l) $\frac{1}{\sin(t)^2\cos(t)^2}$.

$$\begin{aligned}\int^x \frac{1}{\sin(t)^2\cos(t)^2}\mathrm{d}t &= \int^x \frac{1}{\frac{1}{4}\sin(2t)^2}\mathrm{d}t \\ &= 4\int^x \frac{1}{\sin(2t)^2}\mathrm{d}t \\ &= 4\int^x \frac{1}{\cos(2t)^2} \times \frac{\cos(2t)^2}{\sin(2t)^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{-2\tan(2x)}\end{aligned}$$

2. *Enoncé : Déterminer une primitive (en précisant l'ensemble de définition) des fonctions suivantes à l'aide du changement de variable donné :*

(a) $x \mapsto \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)^2}$ via $u = \tan(x)$
$x \mapsto \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$
On a :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{\cos(x)+\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)^2}\mathrm{d}x &= \int^x \frac{1}{\cos^2(t)} + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \times \frac{1}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t \\ &= \tan(x) + \int^x \frac{1}{\tan(t)} \times \tan'(t)\mathrm{d}t \\ &= \tan(x) + \ln|\tan(x)|\end{aligned}$$

(b) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ via $u = \sqrt{e^x - 1}$;
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Posons :

$$u = \sqrt{e^x-1} \iff e^x = u^2+1 \quad \text{et} \quad du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x \iff dx = \frac{2\sqrt{e^x-1}}{e^x}\mathrm{d}u$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}\int^t \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x &= \int^{\sqrt{e^t}-1} \frac{1}{u} \times \frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= \int^{\sqrt{e^t}-1} \frac{2}{u^2+1}\mathrm{d}u \\ &= 2\arctan(u) \\ &= 2\arctan(\sqrt{e^t}-1) \quad \text{définis sur } \mathbb{R}_+\end{aligned}$$

(c) $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ via $u = \sqrt{x^2-1}$;
$x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus]-\infty, 1]$.

Posons :

$$u = \sqrt{x^2 - 1} \iff x^2 = u^2 + 1 \iff x = \sqrt{u^2 + 1}$$

Et :

$$du = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x \iff dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}u$$

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}\int^t \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x &= \int^{\sqrt{t^2-1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2+1}} \times \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\mathrm{d}u \\ &= \int^{\sqrt{t^2-1}} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u \\ &= \arctan\left(\sqrt{t^2-1}\right) \quad \text{définis sur } \mathbb{R}\backslash] -\infty, 1]\end{aligned}$$

(d) $x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{th}(x)}$ via $u = e^x$;
$x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{th}(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Posons :

$$u = e^x \iff x = \ln(u) \quad \text{et} \quad du = e^x\mathrm{d}x \iff dx = \frac{1}{u}\mathrm{d}u$$

Remarque :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{u - u^{-1}}{u + u^{-1}}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\int^t \frac{1}{1+\mathrm{th}(x)}\mathrm{d}x &= \int^{e^t} \frac{1}{1 + \frac{u-u^{-1}}{u+u^{-1}}} \times u^{-1}\mathrm{d}u \\ &= \int^{e^t} \frac{u+u^{-1}}{u+u^{-1}+u-u^{-1}} \times u^{-1}\mathrm{d}u \\ &= \int^{e^t} \frac{1+u^{-2}}{2u}\mathrm{d}u \\ &= \int^{e^t} \frac{u^2+1}{2u^3}\mathrm{d}u \\ &= \int^{e^t} \frac{1}{2u} + \frac{1}{2u^3}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{4u^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln|e^t| - \frac{1}{4e^{2t}} \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4e^{2t}} \text{définis sur } \mathbb{R}\end{aligned}$$

(e) $x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}$ via $u = \sqrt[3]{x}$.
$x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Posons :

$$u = \sqrt[3]{x} \iff x = u^3 \quad \text{et} \quad du = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x \iff dx = 3x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}u$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}\int^t \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x &= \int^{\sqrt[3]{t}} \frac{1}{u^3+u} \times 3x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}u \\ &= \int^{\sqrt[3]{t}} 3\frac{u^2}{u^3+u}\mathrm{d}u \\ &= \int^{\sqrt[3]{t}} 3\frac{u^2}{u(u^2+1)}\mathrm{d}u \\ &= \int^{\sqrt[3]{t}} 3\left(\frac{u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{3}{2}\ln|t^{\frac{2}{3}}+1| \quad \text{définis sur } \mathbb{R}\end{aligned}$$

▶ Équations différentielles linéaires du premier ordre

3. *Enoncé : Résoudre les équations homogènes suivantes :*
   (a) $y'+3xy=0$ sur $\mathbb{R}$;
   On reconnait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto 3x$ continue sur $\mathbb{R}$.
   Les solutions sont donc les $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t} = Ce^{-\frac{3}{2}x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
   (b) $y' - \frac{1}{1+x^2}y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
   On reconnait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto -\frac{1}{1+x^2}$ continue sur $\mathbb{R}$.
   Les solutions sont donc les $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t} = Ce^{\arctan(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
   (c) $y' - \cos(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
   On reconnait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto -\cos(x)$ continue sur $\mathbb{R}$.
   Les solutions sont donc les $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t} = Ce^{\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
   (d) $y' + \frac{1}{x\ln x}y = 0$ sur $]1,\infty[$.
   On reconnait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto -\frac{1}{x\ln x}$ continue sur $]1,\infty[$.
   Les solutions sont donc les $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t} = e^{-\ln(\ln x)} = C \times \frac{1}{\ln x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
4. *Enoncé : Résoudre les équations différentielles suivantes :*
   Indication : pour les questions (a) à (c) on pourra rechercher une solution particulière sous une forme similaire à celle du second membre.
   (a) $y'+2y=t^2+t+1$ sur $\mathbb{R}$;
   On pose :
   $$y'+2y=t^2+t+1 \quad (E)$$
   Et son équation homogène associée :
   $$y'+2y=0 \quad (H)$$
   On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto 2$ continue sur $\mathbb{R}$ et de second membre $b : x \mapsto t^2+t+1$ continue sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y : t \mapsto Ce^{-\int^t a(x)\mathrm{d}t} = Ce^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Pour l'équation (E), on cherche une solution particulière de la forme $y_0 : t \mapsto \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y_0'(t) + 2y_0(t) &= t^2 + t + 1 \\ 2\alpha t + \beta + 2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) &= t^2 + t + 1 \\ 2\alpha t^2 + 2(\alpha + \beta)t + (\beta + 2\gamma) &= t^2 + t + 1 \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 2(\alpha + \beta) = 1 \\ \beta + 2\gamma = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ \gamma = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

(b) $y' + 3y = (x^2 + 1)\, e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$;
On pose :

$$y' + 3y = (x^2 + 1)e^{-3x} \quad (E)$$

Et son équation homogène associée :

$$y' + 3y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto 3$ continue sur $\mathbb{R}$ et de second membre $b : x \mapsto (x^2 + 1)e^{-3x}$ continue sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t} = Ce^{-3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Procédons à une variation de la constante :
On cherche une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^{-3x} + \beta e^{-3x}$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y_0'(x) + 3y_0(x) &= (x^2 + 1)e^{-3x} \\ \lambda'(x)e^{-3x} + \lambda(x)(-3e^{-3x}) + 3\lambda(x)e^{-3x} &= (x^2 + 1)e^{-3x} \\ \lambda'(x)e^{-3x} &= (x^2 + 1)e^{-3x} \\ \lambda'(x) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\int^x \lambda'(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + x$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : x \mapsto Ce^{-3x} + \left(\frac{x^3}{3} + x\right) e^{-3x} = \left(C + \frac{x^3}{3} + x\right) e^{-3x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

(c) $y' + 2y = (x+1)\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$;
On pose :

$$y' + 2y = (x+1)\sin(x) \quad (E)$$

Et son équation homogène associée :

$$y' + 2y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto 2$ continue sur $\mathbb{R}$ et de second membre $b : x \mapsto (x+1)\sin(x)$ continue sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t} = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Pour l'équation (E), on cherche une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto \alpha\sin(x) + \beta\cos(x)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y_0'(x) + 2y_0(x) &= (x+1)\sin(x) \\ \alpha\cos(x) - \beta\sin(x) + 2(\alpha\sin(x) + \beta\cos(x)) &= (x+1)\sin(x) \\ (\alpha + 2\beta)\cos(x) + (2\alpha - \beta)\sin(x) &= (x+1)\sin(x) \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2\left(\dfrac{x+1}{5}\right) \\ \beta = -\dfrac{(x+1)}{5} \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : x \mapsto Ce^{-2x} + \left(\frac{2(x+1)}{5}\sin(x) - \frac{(x+1)}{5}\cos(x)\right) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

(d) $y' + \frac{1}{1+x}y = \frac{1}{(1+x)^3}$ sur $]-1, \infty[$;
On pose :

$$y' + \frac{1}{1+x}y = \frac{1}{(1+x)^3} \quad (E)$$

Et son équation homogène associée :

$$y' + \frac{1}{1+x}y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ continue sur $]-1, \infty[$ et de second membre $b : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^3}$ continue sur $]-1, \infty[$.

Les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t} = C \times \frac{1}{1+x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Procédons à une variation de la constante :

On cherche une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto \lambda(x)\frac{1}{1+x} + \beta\frac{1}{1+x}$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$\begin{aligned}
y_0'(x) + \frac{1}{1+x}y_0(x) &= \frac{1}{(1+x)^3} \\
\lambda'(x)\frac{1}{1+x} + \lambda(x)\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) + \lambda(x)\frac{1}{(1+x)^2} &= \frac{1}{(1+x)^3} \\
\lambda'(x)\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{(1+x)^3} \\
\lambda'(x) &= \frac{1}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\int^x \lambda'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+x}$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : x \mapsto C\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(x+1)^2} = \left(C - \frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{1+x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

(e) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;

On pose :

$$y' + y = \frac{1}{1+e^x} \quad (E)$$

Et son équation homogène associée :

$$y' + y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto 1$ continue sur $\mathbb{R}$ et de second membre $b : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ continue sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t} = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Procédons à une variation de la constante :

On cherche une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^{-x} + \beta e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
y_0'(x) + y_0(x) &= \frac{1}{1+e^x} \\
\lambda'(x)e^{-x} + \lambda(x)(-e^{-x}) + \lambda(x)e^{-x} &= \frac{1}{1+e^x} \\
\lambda'(x)e^{-x} &= \frac{1}{1+e^x} \\
\lambda'(x) &= \frac{e^x}{1+e^x}
\end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\int^x \lambda'(x)\mathrm{d}x = \ln(1+e^x)$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : x \mapsto Ce^{-x} + \ln(1+e^x)e^{-x} = (C + \ln(1+e^x))\, e^{-x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

(f) $y' - \tan(t)y = \frac{1}{1+\cos(t)}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
On pose :

$$y' - \tan(t)y = \frac{1}{1+\cos(t)} \quad (E)$$

Et son équation homogène associée :

$$y' - \tan(t)y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de coefficient $a : t \mapsto -\tan(t)$ continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et de second membre $b : t \mapsto \frac{1}{1+\cos(t)}$ continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y : t \mapsto Ce^{-\int^t a(x)\mathrm{d}t} = Ce^{-\ln(\cos(t))} = \frac{C}{\cos(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Procédons à une variation de la constante :
On cherche une solution particulière de la forme $y_0 : t \mapsto \lambda(t)\frac{1}{\cos(t)}$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
y_0'(t) - \tan(t)y_0(t) &= \frac{1}{1+\cos(t)}\\
\lambda'(t)\frac{1}{\cos(t)} + \lambda(t)\left(\frac{\tan(t)}{\cos(t)}\right) - \lambda(t)\left(\frac{\tan(t)}{\cos(t)}\right) &= \frac{1}{1+\cos(t)}\\
\lambda'(t)\frac{1}{\cos(t)} &= \frac{1}{1+\cos(t)}\\
\lambda'(t) &= \frac{\cos(t)}{1+\cos(t)}\\
\lambda'(t) &= 1 - \frac{1}{1+\cos(t)}\\
\lambda'(t) &= 1 - \frac{1}{2\cos^2(\frac{t}{2})}
\end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\int^t \lambda'(t)\mathrm{d}t = t - \frac{1}{2} \times 2\tan(\frac{t}{2}) = t - \tan(\frac{t}{2})$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : t \mapsto C\frac{1}{\cos(t)} + \left(t - \tan(\frac{t}{2})\right)\frac{1}{\cos(t)} = \left(C + t - \tan(\frac{t}{2})\right)\frac{1}{\cos(t)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

5. *Enoncé : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :*
   (a) $x\ln(x)y' - y = 4$ sur $]1, \infty[$ avec $y(e) = 1$;
   On pose :
$$y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = \frac{4}{x\ln(x)} \quad (E)$$
   Et son équation homogène associée :
$$y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = 0 \quad (H)$$
   On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto -\frac{1}{x\ln(x)}$ continue sur $]1, \infty[$ et de second membre $b : x \mapsto \frac{4}{x\ln(x)}$ continue sur $]1, \infty[$.
   Les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
   En intégrant, on obtient :
$$-\int^x a(t)\mathrm{d}t = \ln(\ln(x))$$
   Donc les solutions de l'équation (H) sont de la forme :
$$y : x \mapsto C\ln(x) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$
   Procédons à une variation de la constante :
   On cherche une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto \lambda(x)\ln(x)$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} y_0'(x) - \frac{1}{x\ln(x)}y_0(x) &= \frac{4}{x\ln(x)} \\ \lambda'(x)\ln(x) + \lambda(x)\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\lambda(x)(\ln(x))}{x\ln(x)} &= \frac{4}{x\ln(x)} \\ \lambda'(x)\ln(x) &= \frac{4}{x\ln(x)} \\ \lambda'(x) &= \frac{4}{x(\ln(x))^2} \end{aligned}$$
   En intégrant, on obtient :
$$\int^x \lambda'(x)\mathrm{d}x = -\frac{4}{\ln(x)}$$
   Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :
$$y : x \mapsto C\ln(x) - \frac{4}{\ln(x)}\ln(x) = C\ln(x) - 4 \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$
   On impose la condition initiale $y(e) = 1$:
$$1 = C\ln(e) - 4 = C - 4$$
   Donc $C = 5$.
   Donc la solution du problème de Cauchy est :
$$y : x \mapsto 5\ln(x) - 4 \quad \text{avec } x \in]1, \infty[.$$

(b) $y' + xy = 2x$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.
On pose :

$$y' + xy = 2x \quad (E)$$

Et son équation homogène associée :

$$y' + xy = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto x$ continue sur $\mathbb{R}$ et de second membre $b : x \mapsto 2x$ continue sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t} = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Procédons à une variation de la constante :
On cherche une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y_0'(x) + xy_0(x) &= 2x \\ \lambda'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} + \lambda(x)\left(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right) + \lambda(x)xe^{-\frac{1}{2}x^2} &= 2x \\ \lambda'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} &= 2x \\ \lambda'(x) &= 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\int^x \lambda'(x)\mathrm{d}x = 2e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 2e^{\frac{1}{2}x^2}e^{-\frac{1}{2}x^2} = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 2$$

On impose la condition initiale $y(0) = 1$:

$$1 = Ce^{-\frac{1}{2}\cdot 0^2} + 2 = C + 2$$

Donc $C = -1$.
Donc la solution du problème de Cauchy est :

$$y : x \mapsto -e^{-\frac{1}{2}x^2} + 2 \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

(c) $y' + \mathrm{th}(t)y = t\,\mathrm{th}(t)$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.
On pose :

$$y' + \mathrm{th}(t)y = t\,\mathrm{th}(t) \quad (E)$$

Et son équation homogène associée :

$$y' + \mathrm{th}(t)y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de coefficient $a : t \mapsto \mathrm{th}(t)$ continue sur $\mathbb{R}$ et de second membre $b : t \mapsto t\,\mathrm{th}(t)$ continue sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\int^t a(x)\mathrm{d}t = \int^t \mathrm{th}(x)\mathrm{d}x = \ln(|\operatorname{ch}(x)|) = \ln(\operatorname{ch}(t))$$

Les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y : t \mapsto Ce^{-\int^t a(x)\mathrm{d}x} = Ce^{-\ln(\operatorname{ch}(t))} = C\frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Procédons à une variation de la constante :
On cherche une solution particulière de la forme $y_0 : t \mapsto \lambda(t)\frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
y_0'(t) + \mathrm{th}(t)y_0(t) &= t\,\mathrm{th}(t)\\
\lambda'(t)\frac{1}{\operatorname{ch}(t)} + \lambda(t)\left(-\frac{\mathrm{th}(t)}{\operatorname{ch}(t)}\right) + \lambda(t)\left(\frac{\mathrm{th}(t)}{\operatorname{ch}(t)}\right) &= t\,\mathrm{th}(t)\\
\lambda'(t)\frac{1}{\operatorname{ch}(t)} &= t\,\mathrm{th}(t)\\
\lambda'(t) &= t\,\mathrm{th}(t)\operatorname{ch}(t)\\
&= t\operatorname{sh}(t)
\end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$\int^x \lambda'(t)\mathrm{d}t = [t\operatorname{ch}(t)]^x - \int^x \operatorname{ch}(t)\mathrm{d}t = x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : t \mapsto C\frac{1}{\operatorname{ch}(t)} + (t\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t))\frac{1}{\operatorname{ch}(t)} = (C + t\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t))\frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

On impose la condition initiale $y(0) = 1$:

$$1 = C\frac{1}{\operatorname{ch}(0)} + (0 \cdot \operatorname{ch}(0) - \operatorname{sh}(0))\frac{1}{\operatorname{ch}(0)} = C + 0$$

Donc $C = 1$.
Donc la solution du problème de Cauchy est :

$$y : t \mapsto \frac{1 + t\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

6. *Enoncé : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation*

$$y'\operatorname{sh}(x) - \frac{y}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)}$$

Posons :

$$y'\operatorname{sh}(x) - \frac{y}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)} \quad (\varepsilon)$$

Remarquons que (ε) est bien définis sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geq 1$.

Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(\varepsilon) \iff y' - y\frac{1}{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)} = \operatorname{th}(x)$$

Posons l'équation homogène associée :

$$y' - y\frac{1}{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)} = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto -\frac{1}{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int^x a(t)dt = -\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)} = -\int^x \frac{1}{\operatorname{th}(t)} \times \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}\mathrm{d}t = -\ln(\operatorname{th}(x))$$

Donc les solutions de (H) sont donc les $y : x \mapsto A\operatorname{th}(x)$ avec $A \in \mathbb{R}$.
Sur $\mathbb{R}_-^*$, ce sont donc les $x \mapsto B\operatorname{th}(x)$ avec $B \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme $y_0 : x \mapsto \lambda(x)\operatorname{th}(x)$ avec $\lambda \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
y_0'(x) - y_0(x)\frac{1}{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)} &= \operatorname{th}(x)\\
\lambda'(x)\operatorname{th}(x) + \lambda(x)\left(-\frac{\operatorname{th}(x)}{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)}\right) + \lambda(x)\frac{\operatorname{th}(x)}{\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)} &= \operatorname{th}(x)\\
\lambda'(x)\operatorname{th}(x) &= \operatorname{th}(x)\\
\lambda'(x) &= 1
\end{aligned}$$

Donc en intégrant, on obtient :

$$\int^x \lambda'(t)\mathrm{d}t = x$$

Donc $y_0 : x \mapsto x\operatorname{th}(x)$ est une solution particulière de (ε) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Elle convient également sur $\mathbb{R}_-^*$.
Analyse :
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (ε).
Donc $y|_{\mathbb{R}_+^*}$ et $y|_{\mathbb{R}_-^*}$ sont solutions de (ε) sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc :

$$\exists A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} y(x) = (A + x)\operatorname{th}(x) \\ y(-x) = (B + x)\operatorname{th}(-x) \end{cases}$$

y doit être continue en 0, donc :

$$y(0) = \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = 0$$

Dérivabilité en 0 :

$y'(0)$ doit exister et :

$$y'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0}$$

Or si $x>0$, on a :

$$\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{(A+x)\operatorname{th}(x)}{x} = (A+x)\frac{\operatorname{th}(x)}{x} = (A+x)\frac{\operatorname{th}(x)-\operatorname{th}(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} A$$

Idem :

$$\frac{y(-x)-y(0)}{-x-0} = \xrightarrow[x\to 0^-]{} B$$

Donc $y'(0)$ existe si et seulement si $A=B$.
Synthèse :

$$y : x \mapsto \begin{cases} (A+x)\operatorname{th}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{est bien solution de } (\varepsilon)$$

Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (A+x)\operatorname{th}(x)$ avec $A \in \mathbb{R}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y'(0) = A$.

7. *Enoncé : Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telles que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x) = 3x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

On veut $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x) = 3x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(\varepsilon)$$

Posons :

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Alors :

$$f \text{ est solution de } (\varepsilon) \iff 2f(x) - 3xF(x) = 0 \iff F \text{ est solution de } y' - \frac{3}{2}xy = 0$$

On reconnait une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 de coefficient $a : x \mapsto -\frac{3}{2}x$ continue sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation sont :

$$y : x \mapsto Ae^{\frac{3}{4}x^2} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

Donc :

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad F : x \mapsto Ae^{\frac{3}{4}x^2}$$

Or

$$F(0) = \int_0^0 f(t)\mathrm{d}t = 0 = Ae^0$$

Donc $A = 0$.
Donc $F = f = 0$

▶ Équations différentielles linéaires d'ordre deux

8. *Enoncé : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:*

(a) $y'' + y' = 3 + 2t$;

Posons :

$$\begin{aligned} & y'' + y' = 3 + 2t \quad (E) \\ \iff & y' + y = 3t + t^2 \quad (E') \end{aligned}$$

Et son équation homogène associée :

$$y' + y = 0 \quad (H')$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de coefficient $a : t \mapsto 1$ continue sur $\mathbb{R}$ et de second membre $b : t \mapsto 3t + t^2$ continue sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation homogène (H') sont : $y : x \mapsto Ce^{-\int^x a(t)\mathrm{d}t} = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
On remarque que $x \mapsto x^2 + x - 1$ est une solution particulière :

$$2x + 1 + (x^2 + x - 1) = 3x + x^2$$

Donc les solutions de l'équation (E') sont de la forme :

$$y : t \mapsto Ce^{-t} + t^2 + t - 1 \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

(b) $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$;

Posons :

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t} \quad (E)$$

Et son équation homogène associée :

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de coefficient à coefficients constants.
Résolvons l'équation homogène (H) :
Posons l'équation caractéristique associée :

$$X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2) = 0 \quad (C)$$

Donc les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y_H : t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-2t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
On remarque que le second membre de l'équation (E) est de la forme $e^{\alpha t}$ avec $\alpha = -1$ une racine de (C).
Donc on cherche une solution particulière de la forme $y_P : t \mapsto (at + b)e^{-t}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$
Alors :

$$y_P'(t) = (-at + a - b)e^{-t}$$

$$y_P''(t) = (at - 2a + b)e^{-t}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) &= e^{-t} \\
(at - 2a + b)e^{-t} + 3(-at + a - b)e^{-t} + 2(at + b)e^{-t} &= e^{-t} \\
(at - 2a + b - 3at + 3a - 3b + 2at + 2b)e^{-t} &= e^{-t} \\
(at - 3at + 2at - 2a + 3a - 3b + b + 2b)e^{-t} &= e^{-t} \\
ae^{-t} &= e^{-t} \\
a &= 1
\end{aligned}$$

Donc on a $y_P : t \mapsto te^{-t}$.
Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-2t} + te^{-t} \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

(c) $y'' - 2y' - 3y = t^2e^t$;
Posons :

$$y'' - 2y' - 3y = t^2e^t \quad (E)$$

Et son équation homogène associée :

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de coefficient à coefficients constants.
Résolvons l'équation homogène (H) :
Posons l'équation caractéristique associée :

$$X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1) = 0 \quad (C)$$

Les racines de (C) sont 3 et -1.
Donc les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y_H : t \mapsto Ae^{3t} + Be^{-t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
On remarque que le second membre de l'équation (E) est de la forme $t^ne^{\alpha t}$ avec $\alpha = 1$, qui n'est pas une racine de (C).
Donc on cherche une solution particulière de la forme $y_P : t \mapsto (at^2 + bt + c)e^t$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ Alors :

$$\begin{aligned}
y_P'(t) &= \Big(at^2 + (2a + b)t + (b + c)\Big)e^t, \\
y_P''(t) &= \Big(at^2 + (4a + b)t + (2a + 2b + c)\Big)e^t.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
y_P'' - 2y_P' - 3y_P = \Big[&at^2 + (4a + b)t + (2a + 2b + c) \\
&- 2\Big(at^2 + (2a + b)t + (b + c)\Big) \\
&- 3\Big(at^2 + bt + c\Big)\Big]e^t \\
= \Big[&-4a\,t^2 - 4b\,t + (2a - 4c)\Big]e^t.
\end{aligned}$$

On veut cette expression égale à t^2e^t ; on identifie donc :

$$\begin{cases} -4a = 1, \\ -4b = 0, \\ 2a - 4c = 0. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a = -\frac{1}{4},\ b = 0,\ c = -\frac{1}{8}.$$

Ainsi

$$y_P(t) = \left(-\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\right) e^t.$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{3t} + Be^{-t} + \left(-\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}\right) e^t \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

(d) $y'' + 5y' + 4y = te^{-t}$;
Posons

$$y'' + 5y' + 4y = te^{-t} \tag{E}$$

et son équation homogène associée

$$y'' + 5y' + 4y = 0 \tag{H}$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Résolvons l'équation homogène (H) :
L'équation caractéristique est

$$X^2 + 5X + 4 = (X + 1)(X + 4) = 0.$$

Ses racines sont -1 et -4 ; ainsi

$$y_H(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Le second membre est te^{-t} avec $\alpha = -1$, racine simple de $(X + 1)(X + 4)$.
On prend donc

$$y_P(t) = (at^2 + bt)\, e^{-t}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ Alors :

$$\begin{aligned} y_P'(t) &= \Big(-at^2 + (2a - b)t + b\Big)e^{-t}, \\ y_P''(t) &= \Big(at^2 + (-4a + b)t + (2a - 2b)\Big)e^{-t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_P'' + 5y_P' + 4y_P &= \Big[at^2 + (-4a + b)t + (2a - 2b) \\ &\quad + 5\Big(-at^2 + (2a - b)t + b\Big) + 4\Big(at^2 + bt\Big)\Big]e^{-t} \\ &= \Big[0 \cdot t^2 + 6a\,t + (2a + 3b)\Big]e^{-t}. \end{aligned}$$

On veut l'égalité avec te^{-t}, d'où

$$\begin{cases} 6a = 1, \\ 2a + 3b = 0. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{1}{6}, \qquad b = -\frac{1}{9}.$$

Ainsi

$$y_P(t) = \left(\frac{1}{6}\,t^2 - \frac{1}{9}\,t\right) e^{-t}.$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-4t} + \left(\frac{1}{6}\,t^2 - \frac{1}{9}\,t\right)e^{-t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

(e) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}\cos(t)$;
Posons

$$y'' - 2y' + 2y = e^{-t}\cos(t) \quad (E)$$

et son équation homogène associée

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Résolvons l'équation homogène (H) :
L'équation caractéristique est

$$X^2 - 2X + 2 = 0 \quad (C)$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4.$$

On pose $\delta = 16i$ tel que $\delta^2 = -4$.
Donc les racines de (C) sont :

$$X_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

Donc les solutions de l'équation homogène (H) sur $\mathbb{R}$ (!) sont :

$$y_H : t \mapsto e^t\,(A\cos(t) + B\sin(t)) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Posons $y_P : t \mapsto e^{-t}\,(a\cos(t) + b\sin(t))$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ une solution particulière de l'équation (E).
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$y_P'(t) = e^{-t}\,((b-a)\cos(t) - (a+b)\sin(t))$$
$$y_P''(t) = e^{-t}\,(-2b\cos(t) + 2a\sin(t))$$

Donc :

$$\begin{aligned}
y_P''(t) - 2y_P'(t) + 2y_P(t) &= (-2b\cos t + 2a\sin t)\,e^{-t} \\
&\quad - 2\,((b-a)\cos t - (a+b)\sin t)\,e^{-t} \\
&\quad + 2\,(a\cos t + b\sin t)\,e^{-t} \\
&= \Big[-2b\cos t + 2a\sin t \\
&\quad - 2(b-a)\cos t + 2(a+b)\sin t + 2a\cos t + 2b\sin t\Big]e^{-t} \\
&= \Big[(-2b - 2b + 2a + 2a)\cos t + (2a + 2a + 2b + 2b)\sin t\Big]e^{-t} \\
&= \Big[(-4b + 4a)\cos t + (4a + 4b)\sin t\Big]e^{-t}
\end{aligned}$$

Donc :

$$(-4b+4a)\cos t + (4a+4b)\sin t = \cos t$$

On identifie les coefficients :

$$\begin{cases} -4b+4a = 1, \\ 4a+4b = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{8}, \\ b = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Donc une solution particulière de l'équation (E) est :

$$y_P : t \mapsto e^{-t}\left(\frac{1}{8}\cos(t) - \frac{1}{8}\sin(t)\right).$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : t \mapsto e^{t}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right) + e^{-t}\left(\frac{1}{8}\cos(t) - \frac{1}{8}\sin(t)\right) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

(f) $y'' + 3y' + 2y = \sin(t)$;
Posons

$$y'' + 3y' + 2y = \sin(t) \quad (E)$$

et son équation homogène associée

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Résolvons l'équation homogène (H) :
L'équation caractéristique est :

$$X^2 + 3X + 2 = (X+1)(X+2) = 0 \quad (C)$$

Les racines de (C) sont -1 et -2.
Donc les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y_H : t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-2t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
Posons $y_P : t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ une solution particulière de l'équation (E).
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$y_P'(t) = -a\sin(t) + b\cos(t)$$
$$y_P''(t) = -a\cos(t) - b\sin(t)$$

Donc :

$$\begin{aligned} y_P''(t) + 3y_P'(t) + 2y_P(t) &= \sin(t) \\ (-a\cos(t) - b\sin(t)) + 3(-a\sin(t) + b\cos(t)) + 2(a\cos(t) + b\sin(t)) &= \sin(t) \\ (-a+3b+2a)\cos(t) + (-b-3a+2b)\sin(t) &= \sin(t) \\ (a+3b)\cos(t) + (b-3a)\sin(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

On identifie les coefficients :

$$\begin{cases} a+3b=0, \\ b-3a=1. \end{cases} \iff \begin{cases} a=-\frac{3}{10}, \\ b=\frac{1}{10}. \end{cases}$$

Donc une solution particulière de l'équation (E) est :

$$y_P : t \mapsto -\frac{3}{10}\cos(t)+\frac{1}{10}\sin(t).$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{-t}+Be^{-2t}-\frac{3}{10}\cos(t)+\frac{1}{10}\sin(t) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

(g) $y''+4y'+3y=\cos(3t)$;
Posons

$$y''+4y'+3y=\cos(3t) \quad (E)$$

et son équation homogène associée

$$y''+4y'+3y=0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Résolvons l'équation homogène (H) :
L'équation caractéristique est :

$$X^2+4X+3=(X+1)(X+3)=0 \quad (C)$$

Les racines de (C) sont -1 et -3.
Donc les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y_H : t \mapsto Ae^{-t}+Be^{-3t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
Posons $y_P : t \mapsto a\cos(3t)+b\sin(3t)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ une solution particulière de l'équation (E).
Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y_P'(t) &= -3a\sin(3t)+3b\cos(3t) \\ y_P''(t) &= -9a\cos(3t)-9b\sin(3t) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} y_P''(t)+4y_P'(t)+3y_P(t) &= \cos(3t) \\ (-9a\cos(3t)-9b\sin(3t))+4(-3a\sin(3t)+3b\cos(3t))+3(a\cos(3t)+b\sin(3t)) &= \cos(3t) \\ (-9a+12b+3a)\cos(3t)+(-9b-12a+3b)\sin(3t) &= \cos(3t) \\ (-6a+12b)\cos(3t)+(-6b-12a)\sin(3t) &= \cos(3t) \end{aligned}$$

On identifie les coefficients :

$$\begin{cases} -6a+12b=1, \\ -6b-12a=0. \end{cases} \iff \begin{cases} a=-\frac{1}{30}, \\ b=-\frac{1}{15}. \end{cases}$$

Donc une solution particulière de l'équation (E) est :

$$y_P : t \mapsto -\frac{1}{30}\cos(3t) - \frac{1}{15}\sin(3t).$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont de la forme :

$$y : t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-3t} - \frac{1}{30}\cos(3t) - \frac{1}{15}\sin(3t) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

(h) $y'' + y = \mathrm{sh}(t)$.
Posons

$$y'' + y = \mathrm{sh}(t) \quad (E)$$

et son équation homogène associée

$$y'' + y = 0 \quad (H)$$

On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Résolvons l'équation homogène (H) :
L'équation caractéristique est :

$$X^2 + 1 = 0 \quad (C)$$

Les racines de (C) sont $0 \pm i$.
Donc les solutions de l'équation homogène (H) sont : $y_H : t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
Posons $y_P : t \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{sh}(t)$ une solution particulière de l'équation (E).
Donc la solution de l'équation (E) est :

$$y : t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{2}\mathrm{sh}(t) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

9. *Enoncé : On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs réelles*

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin(x) \tag{E}$$

(a) *Résoudre l'équation (E).*
L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène

$$(\mathbf{E_H}) : y'' - 4y' + 5y = 0$$

est

$$X^2 - 4X + 5 = 0$$

Les racines de cette équation sont $2 + i$ et $2 - i$. On en déduit que les solutions de ($\mathbf{E_H}$) sont les fonctions

$$x \mapsto (\lambda\cos x + \mu\sin x)e^{2x}$$

avec$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On passe ensuite en complexes, autrement dit on considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}_{\mathbb{C}}) : y'' - 4y' + 5y = e^{(2+i)x}$$

On cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto \mathrm{P}(x)e^{(2+i)x}$ où P est un polynôme à coefficients complexes. Une telle fonction est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{P}''(x) + 2i\mathrm{P}'(x) = 1$$

Il suffit donc de prendre $\mathrm{P}(x) = \frac{1}{2i}x = -\frac{i}{2}x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de $(\mathbf{E}_{\mathrm{C}})$ est donc

$$x \mapsto -\frac{i}{2}xe^{(2+i)x}$$

Une solution particulière de (E) est donc la partie imaginaire de cette dernière fonction. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$-\frac{i}{2}xe^{(2+i)x} = -\frac{i}{2}xe^{2x}(\cos x + i\sin x) = \frac{1}{2}xe^{2x}\sin x - \frac{i}{2}xe^{2x}\cos x$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^{2x}\cos x$$

(b) *Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.*

D'après (a), les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^{2x}\cos x + (\lambda\cos x + \mu\sin x)e^{2x}$$

ou encore

$$x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x\cos x + \lambda\cos x + \mu\sin x\right)e^{2x}$$

avec$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x\cos x + \lambda\cos x + \mu\sin x\right)e^{2x}$$

On a ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\cos x - x\cos x + \frac{1}{2}x\sin x - \lambda\sin x + \mu\cos x + 2\lambda\cos x + 2\mu\sin x\right)e^{2x}$
Le système $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 2 \end{cases}$ équivaut alors à

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ -\dfrac{1}{2} + \mu + 2\lambda = 2 \end{cases}$$

et donc $\lambda = 1$ et $\mu = \frac{1}{2}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x\cos x + \cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)e^{2x}$$

10. *Enoncé :*

   (a) *Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

   Soit $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Existence :

   On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

   On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x), \quad h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x).$$

   Donc g est paire et h est impaire.

   Et de plus :

$$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

   Donc on a bien montrer que f peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

   Unicité :

   Supposons qu'il existe 2 manières d'écrire f comme somme d'une fonction paires et impaires.

   Posons : $\begin{cases} P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \tilde{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$ des fonctions paires et $\begin{cases} I : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \tilde{I} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$

   Par hypothèse, on a :

$$f = P + I = \tilde{P} + \tilde{I}$$

   Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) + I(x) = \tilde{P}(x) + \tilde{I}(x)$$

   Mais également :

$$P(x) - I(x) = \tilde{P}(x) - \tilde{I}(x)$$

   Donc on a :

$$\begin{cases} P(x) = \tilde{P}(x) \\ I(x) = \tilde{I}(x) \end{cases}$$

   Donc $P = \tilde{P}$ et $I = \tilde{I}$, et l'écriture de f et donc unique.

   (b) *Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$.*

   Posons :

$$f''(x) + f(-x) = x \quad (E)$$

   d'après a) :

$$\exists \begin{cases} P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ paire} \\ I : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ impaire} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x) + I(x)$$

Mais on a également :

$$f(-x) = P(-x) + I(-x) = P(x) - I(x)$$

Donc posons :

$$P''(x) + P(x) = 0 \quad (E_P)$$
$$I''(x) - I(x) = x \quad (E_I)$$

Et on a donc :

$$(E) = (E_P) + (E_I)$$

Résolution de (E_P) :
On pose l'équation caractéristique associée :

$$X^2 + 1 = 0 \quad (C_P)$$

Les racines de (C_P) sont :

$$X_{1,2} = \pm i$$

Donc les solutions de l'équation (E_P) sont :

$$P : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Or P est paire, donc $B = 0$.
Donc on a :

$$P : x \mapsto A\cos(x) \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}$$

Résolution de (E_I) :
On pose l'équation caractéristique associée :

$$X^2 - 1 = 0 \quad (C_I)$$

Les racines de (C_I) sont :

$$X_{1,2} = \pm 1$$

Donc les solutions de l'équation (E_I) sont :

$$I_H : x \mapsto Ce^x + De^{-x} \quad \text{avec } C, D \in \mathbb{R}$$

Or I_H est impaire, donc $C = -D$.
Donc on a :

$$I_H : x \mapsto C(e^x - e^{-x}) = \tilde{C}\operatorname{sh}(x) \quad \text{avec } \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

Et $I_p : x \mapsto -x$ est une solution particulière de (E_I).
Donc les solutions de (E_I) sont de la forme :

$$I : x \mapsto \tilde{C}\operatorname{sh}(x) - x \quad \text{avec } \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

Donc les solutions de (E) sont de la forme :

$$f : x \mapsto A\cos(x) + \tilde{C}\operatorname{sh}(x) - x \quad \text{avec } A, \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

▶ Approfondissement

11. *Enoncé : Un produit de convolution.* Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)\, g(t)\, dt$$

(a) *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)\, g(t)\, dt$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t) g(t) \mathrm{d}t - \cos(x) \int_0^x \sin(t) g(t) \mathrm{d}t$$

Les applications $x \mapsto \int_0^x \cos(t) g(t)\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \int_0^x \sin(t) g(t) \mathrm{d}t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme primitives de fonctions continues. Comme sin et cos sont également de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \int_0^x \cos(t) g(t) \mathrm{d}t + \sin(x)\cos(x) g(x) + \sin(x) \int_0^x \sin(t) g(t)\mathrm{d}t - \cos(x)\sin(x) g(x) \\ &= \int_0^x (\cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t)) g(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \cos(t-x) g(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

(b) *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.*

On a montré à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \cos(x) \int_0^x \cos(t) g(t)\mathrm{d}t + \sin(x) \int_0^x \sin(t) g(t) \mathrm{d}t$$

On démontre comme à la première question que f' est de classe $\mathcal{C}^1$ i.e. que f est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin(x) \int_0^x \cos(t) g(t)\mathrm{d}t + \cos^2(x) g(x) + \cos(x) \int_0^x \sin(t) g(t) \mathrm{d}t + \sin^2(x) g(x) \\ &= -\int_0^x (\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)) g(t) \mathrm{d}t + g(x) = -f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Ceci prouve que f est bien solution de $y'' + y = g$.

(c) *En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = g$.*

La solution générale de l'équation homogène $y'' + y = 0$ est $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme f est une solution particulière de $y'' + y = g$, on en déduit que les solutions de $y'' + y = g$ sont $x \mapsto f(x) + \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

12. *Enoncé : Soient $\omega \in \mathbb{R}$, et $x, y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :*

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + \sin(\omega t) \\ y'(t) = x(t) - \cos(\omega t) \end{cases}$$

(a) *Soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $z(t) = x(t) + iy(t)$. Justifier la dérivabilité de z et montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.*

La fonction z est dérivable par définition de la dérivabilité des fonctions de la variable rélle à valeurs complexes. De plus, le système est équivalent à l'équation

$$z'(t) - iz(t) = -ie^{i\omega t}$$

(b) *Déterminer x et y.*

— Premier cas, $\omega \neq 1$: l'équation admet une solution particulière de la forme

$$t \longmapsto ae^{i\omega t}$$

On obtient $a = 1/(1-\omega)$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \longmapsto \frac{e^{i\omega t}}{1-\omega} + \lambda e^{it}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $\lambda = \alpha - i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les solutions x, y sont les fonctions de la forme

$$x : t \longmapsto \frac{\cos(\omega t)}{1-\omega} + \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$$

et

$$y : t \longmapsto \frac{\cos(\omega t)}{1-\omega} - \beta\cos(t) + \alpha\sin(t)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

— Second cas, $\omega = 1$: l'équation admet une solution particulière de la forme

$$t \longmapsto ate^{it}$$

On obtient $a = -i$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \longmapsto -ite^{i\omega t} + \lambda e^{it}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $\lambda = \alpha - i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les solutions x, y sont les fonctions de la forme

$$x : t \longmapsto t\sin(t) + \alpha\cos(t) + \beta\sin(t)$$

et

$$y : t \longmapsto -t\cos(t) - \beta\cos(t) + \alpha\sin(t)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

13. *Enoncé : Équation de Bernoulli. On souhaite résoudre l'équation suivante sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$:*

$$(E) \quad x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}$$

On se donne $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et on définit $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $Y(t) = y(e^t)$.

(a) *Calculer les dérivées y, y', y'' en fonction de Y, Y' et Y''.*
On a, d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée, que $\mathrm{Y} = y \circ \exp$ est dérivable sur I et que $\mathrm{Y}'(t) = e^t y'(e^t)$. De même, Y' est dérivable sur I et l'on a

$$\mathrm{Y}''(t) = e^t y'\left(e^t\right) + e^{2t} y''\left(e^t\right)$$

On en déduit que

$$y'\left(e^t\right) = e^{-t}\mathrm{Y}'(t) \quad \text{et} \quad y''\left(e^t\right) = e^{-2t}\left(\mathrm{Y}''(t) - \mathrm{Y}'(t)\right)$$

(b) *En déduire que y est solution de (E) si et seulement si Y est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E'), que l'on précisera.*
Soit $x > 0$, posons $t = \ln(x)$, ie $x = e^t$. Comme

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) &= e^{2t}y''\left(e^t\right) + 3e^t y'\left(e^t\right) + y\left(e^t\right) \\ &= \mathrm{Y}''(t) - \mathrm{Y}'(t) + 3\mathrm{Y}'(t) + \mathrm{Y}(t) \\ &= \mathrm{Y}''(t) + 2\mathrm{Y}'(t) + \mathrm{Y}(t) \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) sur I si et seulement si Y est solution sur $\mathbb{R}$ (image de I par la fonction ln) de l'équation ($\mathbf{E}'$) : $\mathrm{Y}'' + 2\mathrm{Y}' + \mathrm{Y} = e^{-2t}$.

(c) *Résoudre (E') sur $\mathbb{R}$.*
Comme les solutions de ($\mathbf{E}'_\mathbf{H}$) sont de la forme

$$t \mapsto (\mathrm{A}t + \mathrm{B})e^{-t}, \quad \text{avec A, B} \in \mathbb{R}$$

on sait d'après le cours que ($\mathbf{E}'$) admet une solution particulière de la forme $t \mapsto ae^{-2t}$. Après tout calcul, on trouve $a = 1$. Les solutions de ($\mathbf{E}'$) sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-2t} + (\mathrm{A}t + \mathrm{B})e^{-t}, \quad \text{avec A, B} \in \mathbb{R}$$

(d) *En déduire les solutions de (E) sur I.*
Comme $t = \ln(x)$, on en déduit les solutions de (E) sur I :

$$x > 0 \mapsto \frac{1}{x^2} + \frac{\mathrm{A}\ln(x) + \mathrm{B}}{x}, \quad \text{avec A, B} \in \mathbb{R}$$

(e) *Montrer qu'il existe une unique solution y de (E) sur I telle que $y(1) = y'(1) = 0$.*
C'est immédiat, la condition initiale $(y(1), y'(1)) = (0, 0)$ impose les constantes précédentes $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = (1, -1)$ et l'on trouve donc

$$x \mapsto y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x) - 1}{x}$$