

TD 13

9. (a) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène

$$(\mathbf{E}_{\mathbf{H}}) : y'' - 4y' + 5y = 0$$

est

$$X^2 - 4X + 5 = 0$$

Les racines de cette équation sont $2 + i$ et $2 - i$. On en déduit que les solutions de $(\mathbf{E}_{\mathbf{H}})$ sont les fonctions

$$x \mapsto (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{2x}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On passe ensuite en complexes, autrement dit on considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}_{\mathbf{C}}) : y'' - 4y' + 5y = e^{(2+i)x}$$

On cherche une solution particulière de la forme $x \mapsto P(x)e^{(2+i)x}$ où P est un polynôme à coefficients complexes. Une telle fonction est solution si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, P''(x) + 2iP'(x) = 1$$

Il suffit donc de prendre $P(x) = \frac{1}{2i}x = -\frac{i}{2}x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une solution particulière de $(\mathbf{E}_{\mathbf{C}})$ est donc

$$x \mapsto -\frac{i}{2}xe^{(2+i)x}$$

Une solution particulière de (\mathbf{E}) est donc la partie imaginaire de cette dernière fonction. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$-\frac{i}{2}xe^{(2+i)x} = -\frac{i}{2}xe^{2x}(\cos x + i \sin x) = \frac{1}{2}xe^{2x} \sin x - \frac{i}{2}xe^{2x} \cos x$$

Une solution particulière de (E) est donc

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^{2x} \cos x$$

(b) D'après (a), les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^{2x} \cos x + (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{2x}$$

ou encore

$$x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x \cos x + \lambda \cos x + \mu \sin x \right) e^{2x}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x \cos x + \lambda \cos x + \mu \sin x \right) e^{2x}$$

On a ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2} \cos x - x \cos x + \frac{1}{2}x \sin x - \lambda \sin x + \mu \cos x + 2\lambda \cos x + 2\mu \sin x \right) e^{2x}$$

Le système $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 2 \end{cases}$ équivaut alors à

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ -\frac{1}{2} + \mu + 2\lambda = 2 \end{cases}$$

et donc $\lambda = 1$ et $\mu = \frac{1}{2}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x \cos x + \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) e^{2x}$$

Approfondissements

11. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t)g(t)dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)g(t)dt$$

Les applications $x \mapsto \int_0^x \cos(t)g(t)dt$ et $x \mapsto \int_0^x \sin(t)g(t)dt$ sont de classe \mathcal{C}^1 comme primitives de fonctions continues. Comme \sin et \cos sont également de classe \mathcal{C}^1 , on en déduit que f est de classe \mathcal{C}^1 et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \int_0^x \cos(t)g(t)dt + \sin(x) \cos(x)g(x) + \sin(x) \int_0^x \sin(t)g(t)dt - \cos(x) \sin(x)g(x) \\ &= \int_0^x (\cos(x) \cos(t) + \sin(x) \sin(t))g(t)dt = \int_0^x \cos(t-x)g(t)dt \end{aligned}$$

(b) On a montré à la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \cos(x) \int_0^x \cos(t)g(t)dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)g(t)dt$$

On démontre comme à la première question que f' est de classe \mathcal{C}^1 i.e. que f est de classe \mathcal{C}^2 . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin(x) \int_0^x \cos(t)g(t)dt + \cos^2(x)g(x) + \cos(x) \int_0^x \sin(t)g(t)dt + \sin^2(x)g(x) \\ &= -\int_0^x (\sin(x) \cos(t) - \cos(x) \sin(t))g(t)dt + g(x) = -f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Ceci prouve que f est bien solution de $y'' + y = g$.

(c) La solution générale de l'équation homogène $y'' + y = 0$ est $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme f est une solution particulière de $y'' + y = g$, on en déduit que les solutions de $y'' + y = g$ sont $x \mapsto f(x) + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

12. (a) La fonction z est dérivable par définition de la dérivabilité des fonctions de la variable réelle à valeurs complexes. De plus, le système est équivalent à l'équation

$$z'(t) - iz(t) = -ie^{i\omega t}$$

(b)

— Premier cas, $\omega \neq 1$: l'équation admet une solution particulière de la forme

$$t \mapsto ae^{i\omega t}.$$

On obtient $a = 1/(1 - \omega)$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{e^{i\omega t}}{1 - \omega} + \lambda e^{it}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $\lambda = \alpha - i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les solutions x, y sont les fonctions de la forme

$$x : t \mapsto \frac{\cos(\omega t)}{1 - \omega} + \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$$

et

$$y : t \mapsto \frac{\cos(\omega t)}{1 - \omega} - \beta \cos(t) + \alpha \sin(t),$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

— Second cas, $\omega = 1$: l'équation admet une solution particulière de la forme

$$t \mapsto ate^{it}$$

On obtient $a = -i$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto -ite^{i\omega t} + \lambda e^{it},$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$. Posons $\lambda = \alpha - i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les solutions x, y sont les fonctions de la forme

$$x : t \mapsto t \sin(t) + \alpha \cos(t) + \beta \sin(t),$$

et

$$y : t \mapsto -t \cos(t) - \beta \cos(t) + \alpha \sin(t),$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

13. (a) On a, d'après le théorème de dérivation d'une fonction composée, que $Y = y \circ \exp$ est dérivable sur I et que $Y'(t) = e^t y'(e^t)$. De même, Y' est dérivable sur I et l'on a

$$Y''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$$

On en déduit que

$$y'(e^t) = e^{-t} Y'(t) \quad \text{et} \quad y''(e^t) = e^{-2t} (Y''(t) - Y'(t))$$

(b) Soit $x > 0$, posons $t = \ln(x)$, ie $x = e^t$. Comme

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) &= e^{2t} y''(e^t) + 3e^t y'(e^t) + y(e^t) \\ &= Y''(t) - Y'(t) + 3Y'(t) + Y(t) \\ &= Y''(t) + 2Y'(t) + Y(t) \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution de (E) sur I si et seulement si Y est solution sur \mathbb{R} (image de I par la fonction \ln) de l'équation (\mathbf{E}') : $Y'' + 2Y' + Y = e^{-2t}$.

(c) Comme les solutions de ($\mathbf{E}'_{\mathbf{H}}$) sont de la forme

$$t \mapsto (At + B)e^{-t}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

on sait d'après le cours que (\mathbf{E}') admet une solution particulière de la forme $t \mapsto ae^{-2t}$. Après tout calcul, on trouve $a = 1$. Les solutions de (\mathbf{E}') sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-2t} + (At + B)e^{-t}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

(d) Comme $t = \ln(x)$, on en déduit les solutions de (E) sur I :

$$x > 0 \mapsto \frac{1}{x^2} + \frac{A \ln(x) + B}{x}, \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

(e) C'est immédiat, la condition initiale $(y(1), y'(1)) = (0, 0)$ impose les constantes précédentes $(A, B) = (1, -1)$ et l'on trouve donc

$$x \mapsto y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x) - 1}{x}$$