

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

► Calculs de primitives

1. Déterminer une primitive des expressions suivantes vues comme fonctions de la variable t :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{e^t}{e^{2t} + 1}; & \text{(d)} \quad & \frac{e^{1/t}}{t^2}; & \text{(g)} \quad & \sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}; & \text{(j)} \quad & \frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}; \\ \text{(b)} \quad & \sin(4t); & \text{(e)} \quad & \frac{t^3 + 1}{t + 1}; & \text{(h)} \quad & \frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}; & \text{(k)} \quad & \frac{t^3}{t + 1}; \\ \text{(c)} \quad & \frac{3}{(t+2)^3}; & \text{(f)} \quad & \cos(t)e^{\sin(t)}; & \text{(i)} \quad & \frac{t^2 + t + 1}{t^2}; & \text{(l)} \quad & \frac{1}{\sin(t)^2 \cos(t)^2}. \end{aligned}$$

2. Déterminer une primitive (en précisant l'ensemble de définition) des fonctions suivantes à l'aide du changement de variable donné :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x \mapsto \frac{\cos(x) + \sin(x)}{\sin(x) \cos(x)^2} \text{ via } u = \tan(x) & \text{(d)} \quad & x \mapsto \frac{1}{1 + \operatorname{th}(x)} \text{ via } u = e^x; \\ \text{(b)} \quad & x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \text{ via } u = \sqrt{e^x - 1}; & \text{(e)} \quad & x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} \text{ via } u = \sqrt[3]{x}. \\ \text{(c)} \quad & x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \text{ via } u = \sqrt{x^2 - 1}; \end{aligned}$$

► Équations différentielles linéaires du premier ordre

3. Résoudre les équations homogènes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & y' + 3xy = 0 \text{ sur } \mathbb{R}; & \text{(c)} \quad & y' - \cos(x)y = 0 \text{ sur } \mathbb{R}; \\ \text{(b)} \quad & y' - \frac{1}{1+x^2}y = 0 \text{ sur } \mathbb{R}; & \text{(d)} \quad & y' + \frac{1}{x \ln x}y = 0 \text{ sur }]1, \infty[. \end{aligned}$$

4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

Indication : pour les questions (a) à (c) on pourra rechercher une solution particulière sous une forme similaire à celle du second membre.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & y' + 2y = t^2 + t + 1 \text{ sur } \mathbb{R}; & \text{(d)} \quad & y' + \frac{1}{1+x}y = \frac{1}{(1+x)^3} \text{ sur }]-1, \infty[; \\ \text{(b)} \quad & y' + 3y = (x^2 + 1)e^{-3x} \text{ sur } \mathbb{R}; & \text{(e)} \quad & y' + y = \frac{1}{1+e^x} \text{ sur } \mathbb{R}; \\ \text{(c)} \quad & y' + 2y = (x+1)\sin(x) \text{ sur } \mathbb{R}; & \text{(f)} \quad & y' - \tan(t)y = \frac{1}{1+\cos(t)} \text{ sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[. \end{aligned}$$

5. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x \ln(x)y' - y = 4 \text{ sur }]1, \infty[\text{ avec } y(e) = 1; \\ \text{(b)} \quad & y' + xy = 2x \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } y(0) = 1. \\ \text{(c)} \quad & y' + \operatorname{th}(t)y = t \operatorname{th}(t) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } y(0) = 1. \end{aligned}$$

6. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' \operatorname{sh}(x) - \frac{y}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{\operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)}.$$

7. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x) = 3x \int_0^x f(t) dt$$

► Équations différentielles linéaires d'ordre deux

8. Résoudre les équations différentielles suivantes sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & y'' + y' = 3 + 2t; & \text{(e)} \quad & y'' - 2y' + 2y = e^{-t} \cos(t); \\ \text{(b)} \quad & y'' + 3y' + 2y = e^{-t}; & \text{(f)} \quad & y'' + 3y' + 2y = \sin(t); \\ \text{(c)} \quad & y'' - 2y' - 3y = t^2 e^t; & \text{(g)} \quad & y'' + 4y' + 3y = \cos(3t); \\ \text{(d)} \quad & y'' + 5y' + 4y = te^{-t}; & \text{(h)} \quad & y'' + y = \operatorname{sh}(t). \end{aligned}$$

9. On considère l'équation différentielle dont on recherche les solutions à valeurs réelles

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin(x). \quad (\text{E})$$

- (a) Résoudre l'équation (E).
 (b) Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.
10. (a) Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
 (b) Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$.

► Approfondissements

11. *Un produit de convolution.* Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$$

- (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x)g(t)dt$$

- (b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
 (c) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
12. Soient $\omega \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivables telles que

$$\begin{cases} x' = -y + \sin(\omega t) \\ y' = x - \cos(\omega t) \end{cases}$$

- (a) Soit $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$t \mapsto x(t) + iy(t)$$

Justifier la dérivabilité de z et montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

- (b) Déterminer x et y .

13. *Équation de Bernoulli.* On souhaite résoudre l'équation suivante sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$:

$$x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x^2}. \quad (\text{E})$$

On se donne $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $Y : t \mapsto y(e^t)$.

- (a) Calculer les dérivées y, y' et y'' en fonction de Y, Y' et Y'' .
 (b) En déduire que y est solution de (E) si et seulement si Y est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants (E') que l'on précisera.
 (c) Résoudre (E') sur \mathbb{R} .
 (d) En déduire les solutions de (E) sur I .
 (e) Montrer qu'il existe une unique solution y de (E) sur I telle que $y(1) = y'(1) = 0$.

► Exercice CCINP

42 On considère les deux équations suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

- (a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 (b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 (c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur $]0, +\infty[$?