# MATRICES, SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n$ est un entier fixé dans $\mathbb{N}^*$.

## ▶ Calcul matriciel

1. *Enoncé : Soient $A$ et $B$ deux matrices diagonales. Démontrer que la matrice $AB$ est diagonale.*
   Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales.
   On pose :
   $$A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_{i,j})_{i,j} = (d_i\delta_{i,j})_{i,j}$$
   Et :
   $$B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (b_{i,j})_{i,j} = (d'_i\delta_{i,j})_{i,j}$$
   .
   Fixons $i, j \in [\![1, n]\!]$.
   Le coefficient $(i, j)$ de la matrice $AB$ est donné par :
   $$\begin{aligned} h_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} d_i\delta_{i,k}d'_k\delta_{k,j} \\ &= d_i \sum_{k=1}^{n} d'_k\delta_{i,k}\delta_{k,j} \\ &= d_i \times \begin{cases} d'_i \times 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ &= d_i d'_j \delta_{i,j}. \end{aligned}$$
   Donc :
   $$AB = (d_i d'_j \delta_{i,j})_{i,j} = \operatorname{diag}(d_1 d'_1, d_2 d'_2, \ldots, d_n d'_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$
2. *Enoncé : Soient $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$ ; déterminer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*
   Posons $E_{i,j} = (u_{a,b})_{a,b\in[\![1,n]\!]}$, i.e $\forall a, b \in [\![1, n]\!]$, $u_{a,b} = \delta_{i,a}\delta_{j,b}$.
   Posons $E_{i,j} = (v_{a,b})_{a,b\in[\![1,n]\!]}$, i.e $\forall a, b \in [\![1, n]\!]$, $v_{a,b} = \delta_{k,a}\delta_{\ell,b}$.
   Soit $w_{a,b}$ le coefficient ligne $a \in [\![1, n]\!]$ et colonne $b \in [\![1, n]\!]$ de la matrice $E_{i,j}E_{k,\ell}$.
   On a :

$$\begin{aligned}
w_{a,b} &= \sum_{c=1}^{n} u_{a,c}v_{c,b} \\
&= \sum_{c=1}^{n} \delta_{i,a}\delta_{j,c}\delta_{k,c}\delta_{\ell,b} \\
&= \delta_{i,a}\delta_{\ell,b} \times \sum_{c=1}^{n} \delta_{j,c}\delta_{k,c} \\
&= \delta_{i,a}\delta_{\ell,b}\delta_{j,k} \\
&= \begin{cases} \delta_{i,a}\delta_{\ell,b} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $\delta_{i,a}\delta_{\ell,b}$ est le coefficient ligne $a$ et colonne $b$ de la matrice $E_{i,\ell}$, on a par égalité des coefficients :

$$\begin{cases} E_{i,j}E_{k,\ell} = E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ E_{i,j}E_{k,\ell} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *Enoncé : Calculer les puissances des matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $A$ est triangulaire supérieure.
On a :

$$A^n = (I_3 + N)^n \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, pour tout $n \geq 3$, on a $N^n = 0$ et également $I_3N = NI_3$
Donc :

$$\begin{aligned}
A^n &= (I_3 + N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} I_3^n N^0 + \binom{n}{1} I_3^{n-1} N + \binom{n}{2} I_3^{n-2} N^2 \\
&= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2
\end{aligned}$$

Donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3nq + \frac{6n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 2n + \frac{2n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même :

$$B = 3I_3 + N \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a $\forall n \geq 2, N^n = 0$ et $3I_3N = N3I_3$.
Donc :

$$\begin{aligned} B^n &= (3I_3 + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (3I_3)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0}(3I_3)^n N^0 + \binom{n}{1}(3I_3)^{n-1}N \\ &= 3^n I_3 + n3^{n-1}N \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. *Enoncé : Soient $a, b \in \mathbb{C}$ ; calculer les puissances de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$A = bI_3 + aM \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\forall k \geq 1, M^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad bI_3(aM) = (aM)bI_3$$

Donc :

$$\begin{aligned} A^n &= (bI_3 + aM)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aM)^k (bI_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \times M^k \\ &= b^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} M^k \\ &= b^n I_3 + M \left( \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} 2^{k-1} \right) \end{aligned}$$

Posons :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} 2^{k-1}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2a)^k b^{n-k} + b^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((2a+b)^n - b^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((2a+b)^n - b^n\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(2a+b)^n+b^n}{2} & 0 & \frac{(2a+b)^n-b^n}{2} \\ 0 & b^n & 0 \\ \frac{(2a+b)^n-b^n}{2} & 0 & \frac{(2a+b)^n+b^n}{2} \end{pmatrix}$$

5. *Enoncé : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) *Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.*
   On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$$

   Donc ok.

   (b) *Démontrer qu'il existe deux suites $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \geq 0, A^n = a_n A + b_n I_3$.*
   Montrons par récurrences que pour tout $n \geq 0$ :

$$P(n) : \text{"}\exists (a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad A^n = a_n A + b_n I_3\text{"}$$

   <u>Initialisation :</u>
   Pour $n = 0$, on a :

$$A^0 = I_3 = 0 \times A + 1 \times I_3$$

   Donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
   <u>Hérédité :</u>
   Supposons $P(n)$ vrai, i.e $\exists (a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad A^n = a_n A + b_n I_3$.
   Montrons que $P(n+1)$ est vrai.

On a :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A \\
&= (a_n A + b_n I_3)A \\
&= a_n A^2 + b_n A \\
&= a_n(A + 2I_3) + b_n A \\
&= (a_n + b_n)A + 2a_n I_3 \\
&= a_{n+1}A + b_{n+1} I_3
\end{aligned}$$

avec $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$.
Donc $P(n+1)$ est vrai.

(c) *Déterminer de façon explicite les suites $a$ et $b$.*
On a :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + b_n \\
b_{n+1} &= 2a_n
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
b_0 &= 1
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + b_n \\
2a_{n+1} &= 2a_n + 2b_n \\
b_{n+2} &= b_{n+1} + 2b_n
\end{aligned}$$

Posons l'équation caractéristique :

$$X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1) = 0$$

On a donc les racines 2 et $-1$.
Donc la solution générale de l'équation est :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 0 \quad b_n = A \times 2^n + B \times (-1)^n$$

On a :

$$\begin{cases} b_0 = A + B = 0 \\ b_1 = 2A - B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc on a :

$$\forall n \geq 0, \quad b_n = \frac{1}{3} \times 2^n - \frac{1}{3} \times (-1)^n$$

Et donc, comme $\frac{b_{n+1}}{2} = a_n$, on a :

$$\forall n \geq 0, a_n = \frac{b_{n+1}}{2} = \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{1}{6} \times (-1)^{n+1}$$

6. *Enoncé : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) *Déterminer $A^3$.*
   On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1+\sin^2(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & -1+\cos^2(\theta) & \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \end{pmatrix}$$
   et donc :
$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Donc $A^3$ est la matrice nilpotente.

   (b) *En déduite $(A+I_3)^n$ pour $n \geq 1$.*
   On a :

$$\begin{aligned}(A+I_3)^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} A^k I_3^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} A^k \\ &= I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2\end{aligned}$$

7. *Enoncé : Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Exprimer de façon simple la quantité $X^\top X$.*
   Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
   Donc $X^\top \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et :

$$X^\top X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{K})$$

   Donc les coefficients de $X^\top X$ sont les carrés des composantes de $X$.

8. *Enoncé : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer les puissances de la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.*
   Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$P(n) : \text{"}R_\theta^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}\text{"}$$

   <u>Initialisation :</u>
   Pour $n = 0$, on a :

$$R^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $P(0)$ est vrai.
Hérédité :
Supposons $P(n)$ vrai, i.e $\exists n \in \mathbb{R}, R_\theta^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.
Montrons que $P(n+1)$ est vrai.
On a :

$$\begin{aligned}
R_\theta^{n+1} &= R_\theta^n R_\theta \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) & -\cos(n\theta)\sin(\theta) - \sin(n\theta)\cos(\theta) \\ \sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta) & -\sin(n\theta)\sin(\theta) + \cos(n\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) & -\sin((n+1)\theta) \\ \sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vrai.
Donc par récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. *Enoncé : On considère les deux matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Calculer $A^2, B^2$ et $B^3$. En déduire $A^n$ et $B^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Montrons par récurrence les propositions suivantes :

$$P : A^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n \equiv 0[2] \\ A & \text{si } n \equiv 1[2] \end{cases} \quad Q : B^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n \equiv 0[3] \\ B & \text{si } n \equiv 1[3] \\ B^2 & \text{si } n \equiv 2[3] \end{cases}$$

*Initialisation $n = 0$*

$$A^0 = I_3 \quad \text{or } 0 \equiv 0[2] \Rightarrow \text{donc P est initialisée}$$
$$B^0 = I_3 \quad \text{or } 0 \equiv 0[3] \Rightarrow \text{donc Q est initialisée}$$

*Hérédité*
Supposons $P(n), Q(n)$ vraies pour un $n$ arbitraire, montrons que $P(n+1)$ et $Q(n+1)$ le sont :

— si $n \equiv 0[2]$, alors $A^n = I_3$ (HR) et $A^{n+1} = A$ avec $n+1 \equiv 1[2]$
— si $n \equiv 1[2]$, alors $A^n = A$ (HR) et $A^{n+1} = A^2 = I_3$ avec $n+1 \equiv 0[2]$

Donc $P$ est héréditaire

— si $n \equiv 0[3]$, $B^n = I_3$ (HR) et $B^{n+1} = B$ avec $n+1 \equiv 1[3]$
— si $n \equiv 1[3]$, $B^n = B$ (HR) et $B^{n+1} = B^2$ avec $n+1 \equiv 2[3]$
— si $n \equiv 2[3]$, $B^n = B^2$ (HR) et $B^{n+1} = B^3 = I_3$ avec $n+1 \equiv 0[3]$

Donc $Q$ est héréditaire

$$\text{On a donc } \forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n \equiv 0[2] \\ A & \text{si } n \equiv 1[2] \end{cases} \quad \text{et } B^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n \equiv 0[3] \\ B & \text{si } n \equiv 1[3] \\ B^2 & \text{si } n \equiv 2[3] \end{cases}$$

(b) *Calculer $AB, AB^2, BA$ et $B^2A$.*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AB^2$$

$$B^2A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = AB$$

## ▶ Matrices inversibles

10. *Enoncé : Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, déterminer leur inverse.*

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ;

Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$.
Comme $\forall j \in [\![1,3]\!], a_{1,j} = 0$, $A$ n'est pas inversible.

(b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

Avec un pivot de Gauss, cherchons si il exists $B^{-1}$ tel que $BB^{-1} = I_3$.
On a :

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

On a une ligne de 0, donc $B$ n'est pas inversible.

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ;

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3} L_3,\ L_3 \leftarrow L_3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]
$$

Donc $C$ est inversible et son inverse est :

$$
C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

Posons $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$.

Comme $\forall i \in [\![1, 3]\!], d_{i,1} = 0$, $D$ n'est pas inversible.

(e) $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ;

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 \times (-1),\, L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Donc $E$ n'est pas inversible car il y a une ligne de 0.

(f) $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Posons $F = (f_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$.

Comme $\forall j \in [\![1, 3]\!], f_{2,j} = 0$, $F$ n'est pas inversible.

11. *Enoncé : Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

(a) *Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche les $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+c & a & b \\ 3+b & 1+3a+c & 3b+a \\ a & 1+b & 3a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc :

$$A^3 - 3A - I_3 = 0$$

(b) *En déduire que $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et calculer $A^{-1}$.*
D'après la question a), $A^3 - 3A - I_3 = 0$

$$\begin{aligned} A^3 - 3A &= I_3 \\ A(A^2 - 3I_3) &= I_3 \\ A^{-1} &= A^2 - 3I_3 \end{aligned}$$

Donc $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et

$$A^{-1} = A^2 - 3I_3$$

12. *Enoncé : Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ trois matrices non nulles telles que $ABC = 0$. Démontrer qu'au moins deux de ces dernières sont non inversibles.*
<u>Supposons que $A$ est inversible.</u>
On a :

$$ABC = 0 \iff A^{-1}ABC = 0 \iff BC = 0$$

* Si $B$ est inversible : On a :

$$BC = 0 \iff B^{-1}BC = 0 \iff C = 0$$

Donc $C$ est nulle ce qui est absurde, donc $B$ n'est pas inversible.

* Si $C$ est inversible :
Symétriquement, on a :

$$BC = 0 \iff BCC^{-1} = 0 \iff B = 0$$

Donc $B$ est nulle ce qui est absurde, donc $C$ n'est pas inversible.

Donc si $A$ est inversible, alors $B$ et $C$ ne le sont pas.
<u>Supposons que $A$ n'est pas inversible.</u>

* Si $C$ est inversible :
On a :

$$ABC = 0 \iff ABCC^{-1} = 0 \iff AB = 0$$

** Si $B$ est inversible :
On a :

$$AB = 0 \iff ABB^{-1} = 0 \iff A = 0$$

Donc $A$ est nulle ce qui est absurde, donc $B$ n'est pas inversible.

** Si $B$ n'est pas inversible :
On a :

$$AB = 0$$

et donc $A$ et $B$ ne sont pas inversibles.

* Si $C$ n'est pas inversible :
Donc $A$ (hyp) et $C(*)$ ne sont pas inversibles.

Dans tout les cas, au moins deux des matrices $A$, $B$ et $C$ ne sont pas inversibles.

13. *Enoncé : Soit $A = (\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que $A$ est inversible et calculer son inverse.*

On pose $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ définie par

$$b_{i,j} = \begin{cases} 2, & 1 < i < n \text{ et } i = j, \\ 1, & i = j = 1 \text{ ou } i = j = n, \\ -1, & |i-j| = 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

Notons $BA = (h_{i,k})_{1\leq i,k\leq n}$ et :

$$(BA)_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\, \min(j,k) = b_{i,i-1}\min(i-1,k) + b_{i,i}\min(i,k) + b_{i,i+1}\min(i+1,k).$$

On distingue trois cas :

— Si $k < i$, alors $\min(i-1,k) = \min(i,k) = \min(i+1,k) = k$ et $(BA)_{i,k} = -1\cdot k + 2\cdot k - 1\cdot k = 0$.

— Si $k = i$, alors $\min(i-1,i) = i-1$, $\min(i,i) = i$, $\min(i+1,i) = i$ et $(BA)_{i,i} = -1\,(i-1) + 2\,i - 1\cdot i = 1$.

— Si $k > i$, alors tous les minimums valent $i$ et $(BA)_{i,k} = -1\cdot i + 2\cdot i - 1\cdot i = 0$.

On obtient ainsi $BA = I_n$, ce qui montre que $A$ est inversible et que $A^{-1} = B$.

# ▶ Systèmes linéaires

14. *Enoncé : Résoudre les systèmes linéaires suivants :*

(a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ;

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x - 2z + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -z \end{cases}$$

(b) $\left\{\begin{array}{l} 5x+y+2z=-5/2 \\ 2x-y+2z=-5/3 \end{array}\right.$ ;

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+y+2z=-\frac{5}{2} \\ 2x-y+2z=-\frac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\frac{5}{2}-5x-2z \\ 2x+\frac{5}{2}+5x+2z+2z=-\frac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x+4z=-\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=\frac{-25}{6} \\ y=-\frac{5}{2}-5x-2z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\frac{-25}{24}-\frac{7}{4}x \\ y=-\frac{5}{2}-5x+\frac{25}{12}+\frac{7}{2}x=\frac{-5}{12}-\frac{3}{2}x \end{array}\right.$$

(c) $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x+2z+1 \\ 3x+4x+4z+2+3z=0 \\ 4x+10x+10z+5+4z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x+2z+1 \\ 7x+7z=-2 \\ 14x+14z=-4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x+2z+1 \\ x=-z-\frac{2}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z-\frac{2}{7} \\ y=-2z-\frac{4}{7}+2z+1=\frac{3}{7} \end{array}\right.$$

(d) $\left\{\begin{array}{l} x-y+3z=5/2 \\ x+2y-z=3/2 \end{array}\right.$ ;

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+3z=\frac{5}{2} \\ x+2y-z=\frac{3}{2} \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1 3y-4z=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=-1}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} x-y+3z=\frac{5}{2} \\ x=\frac{-1}{3}+\frac{4}{3}z-3z+\frac{5}{2} \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{-1}{3}+\frac{4}{3}z \\ x=\frac{13}{6}-\frac{5}{3}z \end{array}\right.$$

(e) $\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{array}\right.$ ;

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{array}\right. \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-2L_1,\ L_3\leftarrow L_3-3L_1} \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-L_2} \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{array}\right.$$

(f) $\left\{\begin{array}{l} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{array}\right.$ ;

$$\left\{\begin{array}{l} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{array}\right. \quad L_3\leftarrow L_3-4L_1 : \left\{\begin{array}{l} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 5b+6c=32 \end{array}\right. \quad L_{L^2-3L_1} \leftrightarrows \left\{\begin{array}{l} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 4c=8 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=2 \\ a-b-2=-7 \\ 5b+2\times 2=24 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=2 \\ b=4 \\ a=-5+4=-1 \end{array}\right.$$

(g) $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{array}\right.$ ;

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{array}\right. \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ z=2y+3 \end{array}\right.$$

(h) $\left\{\begin{array}{l} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{array}\right.$ .

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \overrightarrow{L_2} - 2L_1 \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 7y=-1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 0=-4 \end{cases}$$

15. *Enoncé : Résoudre, pour* $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{C}$ *le système :*

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=y_1 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=y_2 \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=y_3 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=y_4 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=y_4\\ x_1+2x_2+x_3+x_4=y_3\\ x_1+x_2+2x_3+x_4=y_2\\ x_1+x_2+x_3+2x_4=y_1\end{cases} \quad \text{avec } y_1,y_2,y_3,y_4\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \quad 2x_1+x_2+x_3+x_4=y_4\\ 0+\dfrac{3}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3+\dfrac{1}{2}x_4=y_3-\dfrac{1}{2}y_4\\ 0+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{3}{2}x_3+\dfrac{1}{2}x_4=y_2-\dfrac{1}{2}y_4\\ 0+\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{1}{2}x_3+\dfrac{3}{2}x_4=y_1-\dfrac{1}{2}y_4\end{cases} \quad (L_i\leftarrow L_i-\tfrac{1}{2}L_1 \text{ pour } i\in\{2,3,4\})$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=y_4\\ \qquad 3x_2+x_3+x_4=2y_3-y_4\\ \qquad x_2+3x_3+x_4=2y_2-y_4\\ \qquad x_2+x_3+3x_4=2y_1-y_4\end{cases} \quad (L_i\leftarrow 2L_i \text{ pour } i\in\{2,3,4\})$$

$$\begin{cases} 2x_1+0+\frac{2}{3}x_3+\frac{2}{3}x_4=y_4-\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_4\\ \qquad 3x_2+x_3+x_4=2y_3-y_4\\ \qquad 0+\frac{8}{3}x_3+\frac{2}{3}x_4=2y_2-y_4-\frac{1}{3}(2y_3-y_4)\\ \qquad 0+\frac{2}{3}x_3+\frac{8}{3}x_4=2y_1-y_4-\frac{1}{3}(2y_3-y_4)\end{cases} \quad \begin{matrix} L_1\leftarrow L_1-\frac{1}{3}L_2\\ L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{3}L_2\\ L_4\leftarrow L_4-\frac{1}{3}L_2\end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1+0+\frac{2}{3}x_3+\frac{2}{3}x_4=y_4-\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_4\\ \qquad 3x_2+x_3+x_4=2y_3-y_4\\ \qquad 0+\frac{8}{3}x_3+\frac{2}{3}x_4=2y_2-\frac{2}{3}y_3-\frac{1}{3}y_4\\ \qquad 0+\frac{2}{3}x_3+\frac{8}{3}x_4=2y_1-\frac{2}{3}y_3-\frac{1}{3}y_4\end{cases} \quad (L_i\leftarrow \tfrac{1}{3}L_i \text{ pour } i\in\{1,3,4\})$$

$$\begin{cases} x_1+0+\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4=\frac{1}{2}y_4-\frac{1}{3}y_2\\ \qquad 3x_2+x_3+x_4=2y_3-y_4\\ \qquad 0+\frac{4}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4=y_2-\frac{1}{3}y_3-\frac{1}{2}y_4\\ \qquad 0+\frac{1}{3}x_3+\frac{4}{3}x_4=y_1-\frac{1}{3}y_3-\frac{1}{2}y_4\end{cases} \quad (L_2\leftarrow L_2-\tfrac{1}{3}L_4)$$

$$\begin{cases} x_1+0+0+\frac{1}{4}x_4=\frac{3}{4}y_1-\frac{1}{4}y_2-\frac{1}{4}y_3\\ \qquad x_2+0+\frac{1}{4}x_4=\frac{3}{4}y_2-\frac{1}{4}y_3-\frac{1}{4}y_4\\ \qquad x_3+\frac{1}{4}x_4=\frac{3}{4}y_3-\frac{1}{4}y_2-\frac{1}{4}y_1\\ \qquad 0+\frac{5}{4}x_4=y_4-\frac{1}{4}(y_2+y_3+y_1)\end{cases} \quad \begin{matrix} L_i\leftarrow \frac{1}{4}L_i \quad \text{pour } i\in\{1,2,3\}\\ L_3\leftarrow \frac{3}{4}L_3\end{matrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1+0+0+x_4=3y_1-y_2-y_3\\ \qquad x_2+0+x_4=3y_2-y_3-y_4\\ \qquad x_3+x_4=3y_3-y_2-y_1\\ \qquad 0+5x_4=4y_4-y_2-y_3-y_1\end{cases} \quad (L_4\leftarrow L_4\times 5)$$

$$\begin{cases} 4x_1+0+0+0=3y_1-y_2-y_3-\frac{4}{5}y_4+\frac{1}{5}y_2+\frac{1}{5}y_3+\frac{1}{5}y_1\\ x_2+0+0+0=3y_2-y_3-y_4-\frac{4}{5}y_4+\frac{1}{5}y_1+\frac{1}{5}y_3\\ x_3+0+0+0=3y_3-y_2-y_1-\frac{4}{5}y_4+\frac{1}{5}y_1+\frac{1}{5}y_2\\ \qquad x_4=\frac{1}{5}(4y_4-y_2-y_3-y_1)\end{cases} \quad L_i\leftarrow L_i-\tfrac{1}{5}L_4 \quad \text{pour } i\in\{1,2,3\}$$

Donc les solutions du système sont :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(4y_1 - y_2 - y_3 - y_4) \\ x_2 = \frac{1}{5}(4y_2 - y_1 - y_3 - y_4) \\ x_3 = \frac{1}{5}(4y_3 - y_2 - y_1 - y_4) \\ x_4 = \frac{1}{5}(4y_4 - y_2 - y_3 - y_1) \end{cases}$$

16. *Enoncé : Résoudre l'équation $X^2 = A$ où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Soit $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $X^2 = A$. On cherche une matrice $X = (x_{i,j})$ triangulaire supérieure telle que $X^2 = A$.
Donc

$$X^2 = \begin{pmatrix} x_{11}^2 & x_{12}(x_{11}+x_{22}) & x_{13}(x_{11}+x_{33}) \\ 0 & x_{22}^2 & x_{23}(x_{22}+x_{33}) \\ 0 & 0 & x_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients de $X^2$ et de $A$, on obtient les équations

$$x_{11}^2 = 1, \quad x_{22}^2 = 4, \quad x_{33}^2 = 16,$$

$$x_{12}(x_{11}+x_{22}) = 0, \quad x_{23}(x_{22}+x_{33}) = 2, \quad x_{13}(x_{11}+x_{33}) = 1.$$

Comme $x_{11} + x_{22} \neq 0$ pour tout choix de signes car $x_{11}^2 = 1$ et $x_{22}^2 = 4$, on a $x_{12} = 0$.
De plus

$$x_{23} = \frac{2}{x_{22}+x_{33}}, \qquad x_{13} = \frac{1}{x_{11}+x_{33}}.$$

Les choix

$$x_{11} = \varepsilon_1 \in \{\pm 1\}, \quad x_{22} = \varepsilon_2 \in \{\pm 2\}, \quad x_{33} = \varepsilon_3 \in \{\pm 4\}$$

produisent huit solutions distinctes :

$$X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dfrac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_3} \\ 0 & \varepsilon_2 & \dfrac{2}{\varepsilon_2+\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{\pm 1\} \times \{\pm 2\} \times \{\pm 4\}.$$

Chacune vérifie bien $X^2 = A$.

## ▶ Approfondissement

17. *Enoncé : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Démontrer que $A$ est diagonale si et seulement si $A^\top A = AA^\top$.*

On le fait par récurrence sur $n \geq 1$. La propriété est immédiate pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$ ; soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure commutant avec sa transposée.
On peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & X^T \\ O_{n,1} & S \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.
L'identification du coefficient d'indice ( 1,1 ) dans la relation $A^T A = AA^T$ donne

$$\alpha^2 = \alpha^2 + X^T X$$

On en déduit $X = O_{n,1}$ et l'égalité $A^T A = AA^T$ donne alors $S^T S = SS^T$. Par hypothèse de récurrence, la matrice $S$ est diagonale et par conséquent la matrice $A$ l'est aussi.

18. *Enoncé : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
Soit $k \geq 0$ ; posons $B_k = A^k + A^{-k}$. On vérifie

$$\left(A^k + A^{-k}\right)\left(A + A^{-1}\right) = A^{k+1} + A^{-(k+1)} + A^{k-1} + A^{-(k-1)}$$

et donc

$$B_k = B_{k+1} + B_{k-1}$$

Sachant $B_0 = 2I_n$ et $B_1 = I_n$, on a par récurrence $B_k = \lambda_k I_n$ avec $(\lambda_k)_k$ la suite récurrente linéaire double déterminée par

$$\begin{cases} \lambda_0 = 2, \lambda_1 = 1 \\ \forall n \geq 0n, \lambda_{n+1} = \lambda_n - \lambda_{n-1} \end{cases}$$

Après résolution, pour $n \geq 0$ :

$$\lambda_n = \frac{(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n}{2^n}$$

19. *Enoncé : Matrices à diagonale dominante. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

*Montrer que $A$ est inversible.*
Raisonnons par l'absurde en supposant $A$ non inversible. Le système $AX = 0$ n'est donc pas de Cramer, ce qui entraîne l'existence d'un vecteur colonne non nul

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

tel que $\mathrm{AX} = 0$. Soit $i_0 \leq n$ tel que $|x_{i_0}| > 0$ soit le maximum des $|x_i|, i \leq n$. Puisque $\mathrm{AX} = 0$, on a en particulier

$$-a_{i_0,i_0} x_{i_0} = \sum_{j \neq i_0}^{n} a_{i_0,j} x_j$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{j\neq i_0}^{n} a_{i_0,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1,j\neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}|\,|x_j|$$

et, par définition de $i_0$,

$$\sum_{j\neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}|\,|x_j| \leq \left(\sum_{j\neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|$$

d'où

$$|a_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}| \leq \left(\sum_{j\neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|$$

et puisque $|x_{i_0}| \neq 0$,

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j\neq i_0}^{n} |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

20. *Enoncé : Pour un sous-ensemble $E$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **commutant** de $E$ l'ensemble*

$$\mathscr{C}(E) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall A \in E,\ AM = MA\}.$$

*Déterminer $\mathscr{C}\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right)$ et $\mathscr{C}\left(GL_n(\mathbb{K})\right)$.*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $i \neq j$, on a $E_{i,j}M = ME_{i,j}$.
L'égalité des coefficients d'indice $(\ i, i\ )$ donne $m_{j,i} = 0$.
L'égalité des coefficients d'indice $(\ i, j\ )$ donne $m_{j,j} = m_{i,i}$.
Par suite la matrice $M$ est scalaire. La réciproque est immédiate.
Pour $GL_n(\mathbb{K})$, on étudie la commutation de $M$ avec $I_n + E_{i,j}$ qui conduit à nouveau à l'égalité $E_{i,j}M = ME_{i,j}$. On obtient la même conclusion.