TD 12

Systèmes linéaires

14. (a) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x-2z+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-z \end{cases}$

(b) $$\begin{cases} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 2x-y+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{5}{2}-5x-2z \\ 2x+\frac{5}{2}+5x+2z+2z=-\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+4z=-\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=\frac{-25}{6} \\ y=-\frac{5}{2}-5x-2z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{-25}{24}-\frac{7}{4}x \\ y=-\frac{5}{2}-5x+\frac{25}{12}+\frac{7}{2}x=\frac{-5}{12}-\frac{3}{2}x \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 3x+4x+4z+2+3z=0 \\ 4x+10x+10z+5+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ 7x+7z=-2 \\ 14x+14z=-4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z+1 \\ x=-z-\frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z-\frac{2}{7} \\ y=-2z-\frac{4}{7}+2z+1=\frac{3}{7} \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ x+2y-z=\dfrac{3}{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{matrix} x-y+3z=\frac{5}{2} \\ 3y-4z=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=-1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-1}{3}+\frac{4}{3}z \\ x=\frac{-1}{3}+\frac{4}{3}z-3z+\frac{5}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-1}{3}+\frac{4}{3}z \\ x=\frac{13}{6}-\frac{5}{3}z \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} L_2 \leftarrow \overrightarrow{L_2}-2L_1 \quad \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{cases} \Leftrightarrow L_3\leftarrow L_3-L_2 \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{cases}$$
$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

(f)
$$\begin{cases} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{cases} \quad L_3\leftarrow L_3-4L_1 \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{:} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 5b+6c=32 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 4c=8 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a-b-2=-7 \\ 5b+2\times 2=24 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=4 \\ a=-5+4=-1 \end{cases}$$

(g) $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2y+3 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} L_2\leftarrow \overrightarrow{L_2}-2L_1 \quad \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 7y=-1 \end{cases} \Longleftrightarrow L_3\leftarrow L_3+L_2 \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 0=-4 \end{cases}.$

Approfondissements

17. On le fait par récurrence sur $n \geq 1$. La propriété est immédiate pour $n=1$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$; soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure commutant avec sa transposée.
On peut écrire

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & X^T\\ O_{n,1} & S\end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.
L'identification du coefficient d'indice (1,1) dans la relation $A^T A=AA^T$ donne

$$\alpha^2=\alpha^2+X^T X$$

On en déduit $X=O_{n,1}$ et l'égalité $A^T A=AA^T$ donne alors $S^T S=SS^T$. Par hypothèse de récurrence, la matrice S est diagonale et par conséquent la matrice A l'est aussi.

18. Soit $k \geq 0$; posons $B_k=A^k+A^{-k}$. On vérifie

$$\left(A^k+A^{-k}\right)\left(A+A^{-1}\right)=A^{k+1}+A^{-(k+1)}+A^{k-1}+A^{-(k-1)}$$

et donc

$$B_k=B_{k+1}+B_{k-1}$$

Sachant $B_0=2I_n$ et $B_1=I_n$, on a par récurrence $B_k=\lambda_k I_n$ avec $(\lambda_k)_k$ la suite récurrente linéaire double déterminée par

$$\begin{cases}\lambda_0=2, \lambda_1=1\\ \forall n \geq 0n,\ \lambda_{n+1}=\lambda_n-\lambda_{n-1}\end{cases}$$

Après résolution, pour $n \geq 0$:

$$\lambda_n=\frac{(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n}{2^n}\,.$$

19. Raisonnons par l'absurde en supposant A non inversible. Le système $AX=0$ n'est donc pas de Cramer, ce qui entraîne l'existence d'un vecteur colonne non nul

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

tel que $\mathrm{AX}=0$. Soit $i_0 \leq n$ tel que $|x_{i_0}|>0$ soit le maximum des $|x_i|, i \leq n$. Puisque $\mathrm{AX}=0$, on a en particulier

$$-a_{i_0,i_0} x_{i_0}=\sum_{j \neq i_0}^n a_{i_0,j} x_j.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire ,

$$\left|\sum_{j \neq i_0}^n a_{i_0,j} x_j\right| \leq \sum_{j=1, j \neq i_0}^n |a_{i_0,j}|\,|x_j|,$$

et, par définition de i_0,

$$\sum_{j \neq i_0}^n |a_{i_0,j}|\,|x_j| \leq\left(\sum_{j \neq i_0}^n |a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|$$

d'où

$$|a_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}| \leq\left(\sum_{j \neq i_0}^n |a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|$$

et puisque $|x_{i_0}| \neq 0$,

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0}^n |a_{i_0,j}|$$

ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

20. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $i \neq j$, on a $E_{i,j}M = ME_{i,j}$.
L'égalité des coefficients d'indice (i,i) donne $m_{j,i} = 0$.
L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne $m_{j,j} = m_{i,i}$.
Par suite la matrice M est scalaire. La réciproque est immédiate.
Pour $GL_n(\mathbb{K})$, on étudie la commutation de M avec $I_n + E_{i,j}$ qui conduit à nouveau à l'égalité $E_{i,j}M = ME_{i,j}$. On obtient la même conclusion.