Matrices, systèmes linéaires

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier fixé dans $\mathbb{N}^*$.

▶ Calcul matriciel

1. Soient A et B deux matrices diagonales. Démontrer que la matrice AB est diagonale.
2. Soient $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$; déterminer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Calculer les puissances des matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
4. Soient $a, b \in \mathbb{C}$; calculer les puissances de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}.$$
5. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.
   (b) Démontrer qu'il existe deux suites $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \geq 0$, $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   (c) Déterminer de façon explicite les suites a et b.
6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Déterminer A^3.
   (b) En déduite $(A + I_3)^n$ pour $n \geq 1$.
7. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Exprimer de façon simple la quantité $X^\top X$.
8. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, déterminer les puissances de la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
9. On considère les deux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer A^2, B^2 et B^3. En déduire A^n et B^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Calculer AB, AB^2, BA et $B^2\,A$.

▶ Matrices inversibles

10. Les matrices suivantes sont–elles inversibles ? Le cas échéant, déterminer leur inverse.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; (c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; (e) $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (f) $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \,.$$

   (a) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$.

   (b) En déduire que $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et calculer A^{-1}.

12. Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ trois matrices non nulles telles que $ABC = 0$. Démontrer qu'au moins deux de ces dernières sont non inversibles.

13. Soit $A = (\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

▶ Systèmes linéaires

14. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

(a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$; (g) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$; (e) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$; (h) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$.

(c) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$;

15. Résoudre, pour $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{C}$ le système :

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 = & y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 = & y_2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 = & y_3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 = & y_4 \end{cases} .$$

16. Résoudre l'équation $X^2 = A$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} .$$

▶ Approfondissements

17. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Démontrer que A est diagonale si et seulement si $A^\top A = AA^\top$.

18. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A + A^{-1} = I_n$. Déterminer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

19. *Matrices à diagonale dominante.* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \,.$$

Montrer que A est inversible.

20. Pour un sous–ensemble E de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *commutant* de E l'ensemble :

$$\mathscr{C}(E) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,|\, \forall A \in E,\ AM = MA\} \,.$$

Déterminer $\mathscr{C}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ et $\mathscr{C}(GL_n(\mathbb{K}))$.