DÉRIVATION

▶ Gammes calculatoires

1. *Enoncé : Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes, en précisant leurs domaines de dérivabilité :*

   (a) $\ln(\ln(x))$;
   La fonction ln (la deuxième) est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et (la première) strictement positive sur $]1, +\infty[$, donc $\ln \circ \ln$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

   $$\forall x > 1, \quad (\ln \circ \ln)'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

   (b) $\arctan(\ln(x))$;
   La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc arctan o ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

   $$\forall x > 0, \quad (\arctan \circ \ln)'(x) = \frac{1}{x\left(1 + \ln^2(x)\right)}$$

   (c) $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$;
   Un tableau de signes montre que $(1 - x)/(1 + x)$ est strictement positif si, et seulement si, $-1 < x < 1$. Par conséquent, la fonction f considérée est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout x dans cet intervalle,

   $$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \arccos'(x)$$

   (d) $\left(\cos^2(x) + \frac{3}{2}\right) \sin(2x)$;
   La fonction f considérée est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin^2(2)x + (1 + \cos(2x)) \cos(2x) + 3\cos(2x) \\ &= \cos(4x) + 4\cos(2x) \end{aligned}$$

   (e) $\ln\left(\sqrt{1 - 2\sin^2(x)}\right)$;
   La fonction $\sin^2$ est périodique, de période π. La fonction $\sqrt{.}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction f considérée est (définie et) dérivable au point $x$si, et seulement si, $1 - 2\sin^2 x > 0$, c'est-àdire si x est strictement compris entre $-\pi/4$ et $\pi/4$ modulo π. Pour de tels x,

   $$f(x) = \frac{1}{2} \ln(\cos(|2x|))$$

   et donc

   $$f'(x) = -\tan(2x)$$

(f) $\frac{\cos(x)+x\sin(x)}{\sin(x)-x\cos(x)}$.
La fonction f considérée est définie et dérivable en tout point x tel que $\sin(x) \neq x\cos(x)$. Cette équation possède une infinité de solutions, une dans chaque intervalle de la forme $]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$(avec $k \in \mathbb{Z}$). En tout point de son ensemble de définition,

$$f'(x) = \frac{-x^2}{(\sin(x)-x\cos(x))^2}$$

2. *Enoncé : Pour $n \geq 1$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_n : x \mapsto x^{n-1}e^{1/x}$. On pose également $g_n = f_n^{(n)}$.*

(a) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de g_n et établit que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g_{n+1}(x) = xg_n'(x) + (n+1)g_n(x)$$

La fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ d'après le théorème sur les produits. En appliquant la formule de Leibniz, on trouve que la dérivée $n+1$-ième de $f_{n+1} : x \mapsto xf_n(x)$ est égale à

$$x \mapsto xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x)$$

ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_{n+1} = xg_n'(x) + (n+1)g_n(x)$$

(b) *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :*

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{1/x}$$

Prouvons la formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
La formule est triviale pour $n = 1$.

— Supposons la formule vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g_n'(x) = (-1)^n \left[\frac{-(n+1)}{x^{n+2}} - \frac{1}{x^{n+3}}\right] e^{1/x}$$

On a donc, d'après la formule démontrée à la première question,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{1/x}$$

La formule est prouvée au rang $n+1$.

— La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

3. *Enoncé : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $f : x \mapsto$ arctan $\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$.*

(a) *Étudier la dérivabilité de la fonction f. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de dérivabilité ?*

Posons :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{a}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)$$

arctan est définis sur $\mathbb{R}$.

Donc f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{a}\} =]-\infty, \frac{1}{a}[\cup]\frac{1}{a}, +\infty[$.

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{a}\}$ comme composé de fonctions usuelles.

(b) *Donner une expression alternative de la fonction f.*

Si $x \neq \frac{1}{a}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-ax)+a(x+a)}{(1-ax)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} \\ &= \frac{1-ax+ax+a^2}{(1-ax)^2+(x-a)^2} \\ &= \frac{1+a^2}{1+a^2+x^2+a^2x^2} \\ &= \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Donc on a :

$$(f - \arctan)' = 0$$

Donc $\exists A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} \forall x < \frac{1}{a}, & f(x) = \arctan(x) + A \\ \forall x > \frac{1}{a}, & f(x) = \arctan(x) + B \end{cases}$

On a $0 \in]-\infty, \frac{1}{a}[$ donc :

$$f(0) = \arctan(0) + A = 0 + A = A$$

Donc

$$A = \arctan\left(\frac{0+a}{1-a\cdot 0}\right) = \arctan(a)$$

Et :

$$\forall x < \frac{1}{a}, \quad f(x) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a)$$

Or :

$$\frac{x+a}{1-ax} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{-1}{a}$$

Donc :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \arctan\left(\frac{-1}{a}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{a}\right)$$

Et :

$$\arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$-\arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2} + B$$

Donc :

$$\forall x > \frac{1}{a}, \quad f(x) = \arctan(x) - \left(\arctan\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

▶ Fonctions dérivables et de classe $\mathscr{C}^k$

4. *Enoncé : On considère la fonction suivante, définie sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \end{aligned}$$

(a) *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.*
f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par composé de fonctions usuelles.

(b) *Démontrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction polynomiale P_n tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$$

Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 1, P(n) : \text{"}\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$, on a :
On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} \\ &= \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

Donc on peut poser $P_1(x) = 2$.
<u>Hérédité</u> : Supposons $P(n)$ vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrons que $P(n+1)$ est vrai.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}\right) \quad \text{Par H.R} \\
&= \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} + \left(\frac{P_n'(x)x^{3n} - 3nx^{3n-1}P_n(x)}{x^{6n}}e^{-1/x^2}\right) \\
&= \left(\frac{2P_n(x) + \frac{P_n'(x)x^{3n}}{x^{3n-3}} - \frac{3nx^{3n-1}P_n(x)}{x^{3n-3}}}{x^{3n+3}}\right)e^{-1/x^2} \\
&= \left(\frac{2P_n(x) + P_n'(x)x^3 - 3nx^2P_n(x)}{x^{3n+3}}\right)e^{-1/x^2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$P_{n+1}(x) = x^3P_n'(x) + (2 - 3nx^2)P_n(x)$$

Donc P_n est héréditaire.
Conclusion :
$\forall n \geq 1, P(n)$ est vrai.

(c) *En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0 et calculer $f^{(n)}(0)$.*
Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 0, P(n) : \text{"}f \text{ est dérivable n fois, est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f^{(n)}(0) = 0\text{"}$$

Initialisation : Pour $n = 0$,
On a :

$$e^{\frac{-1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Donc f est continue en 0. et $f^{(0)} = f(0) = 0$.
Hérédité :
Supposons $P(n)$ vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(n)}(0) = 0$.
Montrons que $P(n+1)$ est vrai.
Si on pose $g = f^{(n)}$, par hypothèse de récurrence, on a $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $g(0) = 0$.
Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$:

$$g'(x) = f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Donc par théorème des limites dérivables :

$$\begin{cases} g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \\ g'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{i.e} \quad \begin{cases} f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R}) \\ f^{(n+1)}(0) = 0 \end{cases}$$

Donc $P(n)$ est héréditaire.
Conclusion :
$\forall n \geq 0, P(n)$ est vrai et donc $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall n \geq 0, f^{(n)}(0) = 0$.

5. *Enoncé : Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ sans y être de classe $\mathscr{C}^1$.*
Posons :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Alors $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par produit d'une fonction bornée et par $x \mapsto x^2$ qui tends vers 0.
Donc, on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.
Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors f est dérivable en x par produit et composé de fonctions usuelles.
Et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivé y est continue.
<u>En 0 :</u>
Si $x \neq 0$, alors on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Mais si on pose les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2n\pi}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, alors on a :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Et $\forall n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= \frac{2}{2n\pi}\sin(n\pi) - \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 \\ f'(y_n) &= \frac{2}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \underbrace{\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = \frac{2}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc par caractérisation séquentielle de la limite en 0, f' n'as pas de limite en 0. Donc f' n'est pas continue en 0.
Donc $f \notin \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

6. *Enoncé : Démontrer que la fonction tangente hyperbolique admet une réciproque définie sur un ensemble à déterminer et calculer sa dérivée.*
Posons :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tanh(x) \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \tanh(x) \\ &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1 \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) > 0$$

Donc f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
Donc par théorème de la bijection, f est bijective.
Donc f admet une réciproque de $]-1, 1[$ dans $]-\infty, +\infty[$, que l'on note f^{-1}.
Et par le théorème de la dérivée de la réciproque, pour $y \in]-1, 1[$ on a :

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{1 - \tanh^2(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{1 - y^2} \end{aligned}$$

7. *Enoncé : Déterminer les fonctions $f : R \to R$ dérivables en 0 telles que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Soit f une fonction vérifiant la condition de l'énoncé. Fixons $y \in \mathbb{R}$. Puisque exp et f sont dérivables en $0, x \mapsto e^x f(y) + e^y f(x)$ est également dérivable en 0 . Ainsi $x \mapsto f(x+y)$ est dérivable en 0 i.e. f
est dérivable en y. Puisque le choix de y est arbitraire, f est dérivable sur R.
Dérivons maintenant la condition de l'énoncé par rapport à la variable y. On obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(x+y) = e^x f'(y) + e^y f(x)$$

Fixons maintenant $y = 0$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(0)e^x + f(x)$. Posons $a = f'(0)$. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y' - y = ae^x$. Les solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La méthode de variation de la constante fournit une solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = ae^x$, à savoir $x \mapsto axe^x$. On en déduit que f est

de la forme $x \mapsto \text{axe}\ ^x + \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Enfin $f(0+0) = e^0 f(0) + e^0 f(0)$ et donc $f(0) = 0$, ce qui impose $\lambda = 0$. f est donc de la forme $x \mapsto axe^x$.
Réciproquement soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto axe^x$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+y) = a(x+y)e^{x+y} = axe^x e^y + aye^x e^y = e^y f(x) + e^x f(y)$$

Ainsi f vérifie bien la condition de l'énoncé.
Les fonctions recherchées sont donc exactement les fonctions de la forme $x \mapsto \text{axe}\ ^x$ avec $a \in \mathbb{R}$.

▶ Théorème de Rolle, accroissements finis

8. *Enoncé : En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer les inégalités suivantes :*
   On rappelle le théorème des accroissements finis :
   Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ avec $a < b$ dérivable sur $]a,b[$, alors :

   $$c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$;
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   Posons $S_a = \begin{cases} [0,x] & \text{si } x \geq 0 \\ [x,0] & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $S_b = \begin{cases}]0,x[& \text{si } x \geq 0 \\ ]x,0[& \text{si } x < 0 \end{cases}$
   On a : $\sin \in \mathscr{C}^0(S_a)$ et dérivable sur S_b.
   Et comme $|\sin'| = |\cos| \leq 1$, on a :

   $$|\sin(x) - \sin(0)| = 1 \times |x - 0|$$
   $$|\sin(x)| = |x|$$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
   Posons $f : x \mapsto \ln(1+x)$
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $f \in \mathscr{C}^0([0,x])$ et dérivable sur $]0,x[$.
   Et comme $|f'| = |\frac{1}{1+x}| \leq 1$, on a :

   $$|f(x) - f(0)| \leq 1 \times |x - 0|$$
   $$|f(x)| \leq |x|$$
   $$\ln(1+x) \leq x$$

9. *Enoncé : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable admettant une même limite en $+\infty$ et $-\infty$. Prouver l'existence d'un réel x tel que $f'(x) = 0$.*
   Quitte à changer f en $f - \ell$, on peut supposer que $\ell = 0$. Si f est nulle, le résultat est banal. Dans le cas contraire, quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'elle prend une valeur $\beta > 0$ en α. Puisque

   $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend la valeur $\beta/2$ sur les intervalles $]\alpha, +\infty[$ et $]-\infty, \alpha[$. Ainsi, d'après le lemme de Rolle, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

10. *Enoncé : Etudier la limite en $+\infty$ de l'expression*

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$$

Posons :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto te^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

Si $x > 0$, alors :

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$$

Fixons $x > 0$.

Alors : $\begin{cases} f \in \mathscr{C}^0([x, x+1]) \\ f \text{ est dérivable sur }]x, x+1[\end{cases}$

Donc par théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} \exists c_x \in]x, x+1[, \text{ tel que } \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} &= f'(c_x) \\ &= e^{\frac{1}{c_x}} \left(1 - \frac{1}{c_x}\right) \end{aligned}$$

Or $x < c_x < x+1$, donc par encadrement/minoration :

$$c_x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

Donc par composée :

$$f'(c_x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} e^0 (1 - 0) = 1$$

11. *Enoncé : Soit P une fonction polynomiale ; démontrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.*

Soit P une fonction polynomiale, i.e, $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$.

Montrons que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Supposons qu'il y en a une infinité.

Donc par caractérisation séquentielle de la limite, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que
$\begin{cases} (x_n)_n \text{ est strictement croissante} \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(x_n) = e^{x_n} \end{cases}$

Posons : $f : x \mapsto P(x) - e^x \in \mathscr{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$.

On a : $\begin{cases} f \in \mathbb{C}^0([x_n, x_{n+1}]) \\ f \text{ est dérivable sur }]x_n, x_{n+1}[f(x_n) = f(x_{n+1}) = 0 \end{cases}$ Donc par le théorème de Rolle :

$$\exists y_n \in]x_n, x_{n+1}[\text{ tel que } f'(y_n) = 0$$

Donc : $P'(y_n) = e^{y_n}$
Donc l'équation $P'(x) = e^x$ admet une infinité de solutions.
Par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k)}(x) = e^x \text{ admet une infinité de solutions.}$$

Or $P^{(n+1)} = 0$ et l'équation $0 = e^x$ n'admet pas de solutions ce qui est absurde.
Donc l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

12. *Enoncé : On considère la fonction définie sur* $]-1, +\infty\left[\text{par } f : x \mapsto \sqrt{1+x}\right.$ *ainsi que la suite* $(u_n)_n$ *vérifiant* $u_0 = 3$ *et* $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) *Démontrer que f admet un point fixe, que nous noterons α.*
   Soit $x \geq -1$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \sqrt{1+x} &= x \end{aligned}$$

   Donc : $\begin{cases} x^2 = 1 + x \\ x > 0 \end{cases}$ Donc on a :

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$$

   (b) *Justifier que $\forall n \geq 0, u_n \in \mathbb{R}_+$.*
   On a : $u_0 = 3 \in \mathbb{R}_+$.
   Et par récurrence, comme f a valeurs dans $\mathbb{R}_+$ ($\sqrt{\cdot}$), on a : $\forall n \geq 0, u_n \in \mathbb{R}_+$.

   (c) *Montrer que $\forall n \geq 0, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$. En déduire que $(u_n)_n$ converge (vers quelle limite ?).*
   Comme : $\begin{cases} f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \\ f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$
   Et que $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| = |\frac{1}{2\sqrt{1+x}}| = \frac{1}{2} \times |\frac{1}{\sqrt{1+x}}| \leq \frac{1}{2}$.
   Donc par l'inégalité des accroissement des accroissements finis, f est $\frac{1}{2}$-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, \quad |u_{n+1} - \alpha| &\leq |f(u_n) - f(\alpha)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \end{aligned}$$

   Donc par récurrence, on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   Donc $(u_n)_n$ converge vers α.

13. *Enoncé : Démontrer que* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.
   Posons :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

   Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\begin{cases} f \in \mathscr{C}^0([0,x]) \\ f \text{ est dérivable sur }]0,x[\end{cases}$
   Donc par le théorème des accroissements finis, on a :

$$\begin{aligned} \exists c_x \in]0,x[\quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= f'(c_x) \\ f(x) &= xf'(c_x) \\ \arctan(x) &= \frac{x}{1+c_x^2} \end{aligned}$$

   Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists c_x \in]0,x[\quad \arctan(x) = \frac{x}{1+c_x^2}$$

   Or, à x fixé :

$$\begin{aligned} 0 < c_x &< x \\ 0 < c_x^2 &< x^2 \\ 1 < 1+c_x^2 &< 1+x^2 \\ \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c_x^2} &< 1 \\ \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c_x^2} &< x \end{aligned}$$

   Donc on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$$

▶ Fonctions convexes

14. *Enoncé : Soient* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ *; montrer que :*

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

   Soit $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.
   Posons $f = -\ln$, alors f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par jensen, comme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_k) \\
-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) &\leq -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \\
\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) &\geq \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \\
&= \ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}\right)
\end{aligned}$$

Et par croissance de l'exponentielle, on a bien :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

15. *Enoncé : Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$ une fonction convexe. Démontrer que :*

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$ tel que f soit convexe.
Soit $t \in [a,b]$, posons : $g(t) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)$.
Donc $\forall t \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}
f(t) &\leq g(t) \\
\int_a^b f(t)\mathrm{d}t &\leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \\
\int_a^b f(t)\mathrm{d}t &\leq f(a)(b-a) + \frac{1}{2}(f(b)-f(a))(b-a) \\
\int_a^b f(t)\mathrm{d}t &\leq \frac{f(a)(b-a)}{2}(b-a)
\end{aligned}$$

Soit $z : t \mapsto f(\frac{a+b}{2}) + (t - \frac{a+b}{2}) f'(\frac{a+b}{2})$.
Donc par convexité, $\forall t \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}
z(t) &\geq f(t) \\
\int_a^b z(t)\mathrm{d}t &\geq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \\
(b-a) &\geq \int_a^b f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc ok.

16. *Enoncé : Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$; démontrer que :*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

On a $x \mapsto x^2$ convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Et pour $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$.
Donc par Jensen, on a :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}a_k^2$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^2 \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)^2$$
$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k^2} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$$

17. *Enoncé : Inégalités de Young et Hölder. Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
    (a) *Démontrer que pour tous $x, y > 0$, on a $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.*
    Posons $f : x \mapsto \ln(x)$, alors f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
    Soit $x, y > 0$, par jensen on a :

$$f\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}f(x^p) + \frac{1}{q}f(y^q)$$
$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q)$$
$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \ln(x^{\frac{p}{p}}) + \ln(y^{\frac{q}{q}})$$
$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \ln(xy)$$
$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq xy$$

    (b) *En déduire que pour tous $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ on a :*

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

    Posons $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$A = \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}, \quad B = \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}, \quad x_k = \frac{a_k}{A}, \quad y_k = \frac{b_k}{B}$$

    Alors
$$\sum_{k=1}^n x_k^p = \frac{1}{A}\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n y_k^q = \frac{1}{B}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right) = 1$$
    .
    En appliquant l'inégalité précendente :

$$x_k\, y_k \;\leq\; \frac{x_k^p}{p} + \frac{y_k^q}{q}.$$

En sommant sur k et en utilisant les normalisations précédentes :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} x_k^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} y_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Et donc on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A\,B\,\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \;\leq\; A\,B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}.$$

▶ Approfondissement

18. *Enoncé : Règle de l'Hôpital.*

    (a) *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

    $$g'(c)\,(f(b) - f(a)) = f'(c)\,(g(b) - g(a)).$$

    Soit φ la fonction définie sur $[a, b]$ par

    $$x \mapsto (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) - (f(x) - g(a))(g(b) - g(a))$$

    Cete fonction vérifie les mêmes hypothèses que f et l'on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, ainsi d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b\,[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire

    $$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

    (b) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et f et g deux fonctions définies et continues sur I, dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$, telles que :*

    $$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad g'(x) \neq 0, \quad \text{et} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

    Démontrer que :

    $$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell.$$

    D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \neq x_0$, il existe $x' \neq x_0$ tel que

    $$g(x) - g\,(x_0) = (x - x_0)\, g'\,(x') \neq 0$$

    car g' ne s'annule pas sur I. Ainsi le quotient de l'énoncé est-il défini pour tout $x \neq x_0$. Soit $x \neq x_0$. D'après le résultat de la question 1., il existe c_x appartenant à $]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$ tel que

    $$\frac{f(x) - f\,(x_0)}{g(x) - g\,(x_0)} = \frac{f'\,(c_x)}{g'\,(c_x)}$$

    Comme $x_0 < c_x < x$ ou $x < c_x < x_0$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to x_0} c_x = x_0$$

puis par composition des limites,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = e$$

19. *Enoncé : Théorème de Darboux.* Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

   (a) On considère les fonctions définies par

$$\phi(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } a < x \leqslant b \end{cases}$$

   et

$$\psi(x) = \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b \\ \frac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } a \leqslant x < b \end{cases}$$

   Comme quotient de fonctions continues, la fonction ϕ est continue sur l'intervalle $]a,b]$. Comme f est dérivable en a,

$$\phi(a) = f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \phi(x)$$

   donc ϕ est aussi continue en $x = a$.
   On justifie de manière analogue la continuité de ψ sur le segment $[a,b]$.

   (b) Les fonctions ϕ et ψ sont continues sur le segment $[a,b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ϕ prend toutes les valeurs comprises entre $\phi(a) = f'(a)$ et $\phi(b)$ et ψ prend toutes les valeurs comprises entre $\psi(a)$ et $\psi(b) = f'(b)$. Or $\psi(a) = \phi(b)$!
   Voici les différents cas possibles, selon la valeur du réel $\gamma = \psi(a) = \phi(b)$:

   — si $\gamma < 0 < f'(b)$, alors il existe $x \in]a,b[$ tel que $\psi(x) = 0$;
   — si $f'(a) < 0 < \gamma$, alors il existe $x \in]a,b[$ tel que $\phi(x) = 0$;
   — si $\gamma = 0$, alors $\psi(a) = \phi(b) = 0$.

   Mais d'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall x \in]a,b], \exists c \in]a,b[, \quad \phi(x) = f'(c)$$

   et

$$\forall x \in [a,b[, \exists c \in]a,b[, \quad \psi(x) = f'(c)$$

   Ainsi, qu'elle soit ou non continue, l'application f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (théorème attribué à Darboux).

20. *Enoncé : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que*

$$f^2(x) + (1 + f'(x))^2 \leq 1.$$

Montrer que f est nulle.

L'inégalité de l'énoncé implique que f est bornée (entre -1 et 1) et que f' est négative. Ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et, d'après le théorème de la limite monotone, admet des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$.

Supposons que f admette une limite non nulle en $+\infty$. Alors il existe $c > 0$ et $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \geq c$ pour $x \geq \mathrm{A}$. Si on pose $d = \sqrt{1 - c^2} - 1 < 0$, alors $f'(x) \leq d$ pour $x \geq \mathrm{A}$. Mais, d'après le théorème des accroissements finis, $f(x) - f(\mathrm{A}) \leq d(x - \mathrm{A})$ pour $x \geq \mathrm{A}$. Ceci implique que $\lim_{+\infty} f = -\infty$ et donc une contradiction. Ainsi $\lim_{+\infty} f = 0$.

On prouve de la même manière que $\lim_{-\infty} f = 0$.

La décroissance de f permet alors de conclure que f est nulle.

21. *Enoncé : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient A et B deux points distincts de sa courbe représentative $\mathscr{C}$ tels que B soit sur la tangente à $\mathscr{C}$ en A.*

Montrer qu'il existe un point M de $\mathscr{C}$, distinct de A, tel que A soit sur la tangente à $\mathscr{C}$ en M.

Notons a et b les abscisses respectives de A et B . Pour simplifier, nous supposerons $a < b$. Le fait que B soit sur la tangente à $\mathcal{C}$ en A se traduit par :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) \text{ ou encore } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$$

De même, on cherche donc un point M d'abscisse c vérifiant :

$$f(a) = f(c) + f'(c)(a - c)$$

Définissons une fonction g sur I par $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pour } x \in \mathrm{I} \backslash \{a\} \\ g(a) = f'(a) \end{cases}$. g est continue sur $]a, b\,]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme f est dérivable en a, g est continue en a. g est donc continue sur $[a, b]$. De plus, g est dérivable sur $]a, b[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Enfin, $g(b) = g(a) = f'(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]\,a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or pour $x \in]\,a, b\left[, g'(x) = \frac{f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}\right.$. On a donc

$$f'(c)(c - a) - f(c) + f(a) = 0$$

ce qui est bien l'égalité annoncée plus haut.