

## TD 11

### Gammes calculatoires

1. (a) La fonction  $\ln$  (la deuxième) est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et (la première) strictement positive *sur*  $]1, +\infty[$ , donc  $\ln \circ \ln$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et

$$\forall x > 1, \quad (\ln \circ \ln)'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

- (b) La fonction  $\arctan$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $\arctan \circ \ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x > 0, \quad (\arctan \circ \ln)'(x) = \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))}$$

- (c) Un tableau de signes montre que  $(1-x)/(1+x)$  est strictement positif si, et seulement si,  $-1 < x < 1$ . Par conséquent, la fonction  $f$  considérée est dérivable sur  $] -1, 1 [$  et pour tout  $x$  dans cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \arccos'(x).$$

- (d) La fonction  $f$  considérée est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin^2(2x) + (1 + \cos(2x)) \cos(2x) + 3 \cos(2x) \\ &= \cos(4x) + 4 \cos(2x) \end{aligned}$$

- (e) La fonction  $\sin^2$  est périodique, de période  $\pi$ . La fonction  $\sqrt{\cdot}$  est dérivable et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc la fonction  $f$  considérée est (définie et) dérivable au point  $x$  si, et seulement si,  $1 - 2 \sin^2 x > 0$ , c'est-à-dire si  $x$  est strictement compris entre  $-\pi/4$  et  $\pi/4$  modulo  $\pi$ . Pour de tels  $x$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln(\cos(|2x|))$$

et donc

$$f'(x) = -\tan(2x).$$

(f) La fonction  $f$  considérée est définie et dérivable en tout point  $x$  tel que  $\sin(x) \neq x \cos(x)$ . Cette équation possède une infinité de solutions, une dans chaque intervalle de la forme  $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ). En tout point de son ensemble de définition,

$$f'(x) = \frac{-x^2}{(\sin(x) - x \cos(x))^2}.$$

2. (a) La fonction  $g_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  d'après le théorème sur les produits. En appliquant la formule de Leibniz, on trouve que la dérivée  $n + 1$ -ième de  $f_{n+1} : x \mapsto x f_n(x)$  est égale à

$$x \mapsto x f_n^{(n+1)}(x) + (n + 1) f_n^{(n)}(x)$$

ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$g_{n+1} = x g_n'(x) + (n + 1) g_n(x)$$

(b) Prouvons la formule par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- La formule est triviale pour  $n = 1$ .
- Supposons la formule vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $g_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g_n'(x) = (-1)^n \left[ \frac{-(n+1)}{x^{n+2}} - \frac{1}{x^{n+3}} \right] e^{1/x}$$

On a donc, d'après la formule démontrée à la première question,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}$$

La formule est prouvée au rang  $n + 1$ .

- La formule est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  d'après le principe de récurrence.

## Fonctions dérivables et de classe $\mathcal{C}^k$

7. Soit  $f$  une fonction vérifiant la condition de l'énoncé. Fixons  $y \in \mathbb{R}$ . Puisque  $\exp$  et  $f$  sont dérivables en 0,  $x \mapsto e^x f(y) + e^y f(x)$  est également dérivable en 0. Ainsi  $x \mapsto f(x + y)$  est dérivable en 0 i.e.  $f$

est dérivable en  $y$ . Puisque le choix de  $y$  est arbitraire,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Dérivons maintenant la condition de l'énoncé par rapport à la variable  $y$ . On obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f'(x + y) = e^x f'(y) + e^y f(x)$$

Fixons maintenant  $y = 0$ . On a donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = f'(0)e^x + f(x)$ . Posons  $a = f'(0)$ . La fonction  $f$  est donc solution de l'équation différentielle  $y' - y = ae^x$ . Les solutions de l'équation homogène  $y' - y = 0$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La méthode de variation de la constante fournit une solution particulière de l'équation différentielle  $y' - y = ae^x$ , à savoir  $x \mapsto axe^x$ . On en déduit que  $f$  est de la forme  $x \mapsto axe^x + \lambda e^x$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Enfin  $f(0 + 0) = e^0 f(0) + e^0 f(0)$  et donc  $f(0) = 0$ , ce qui impose  $\lambda = 0$ .  $f$  est donc de la forme  $x \mapsto axe^x$ . Réciproquement soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : x \mapsto axe^x$ . Alors pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x + y) = a(x + y)e^{x+y} = axe^x e^y + aye^x e^y = e^y f(x) + e^x f(y)$$

Ainsi  $f$  vérifie bien la condition de l'énoncé.

Les fonctions recherchées sont donc exactement les fonctions de la forme  $x \mapsto axe^x$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

## **Théorème de Rolle, accroissements finis**

9. Quitte à changer  $f$  en  $f - \ell$ , on peut supposer que  $\ell = 0$ . Si  $f$  est nulle, le résultat est banal. Dans le cas contraire, quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer qu'elle prend une valeur  $\beta > 0$  en  $\alpha$ . Puisque

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

et d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  prend la valeur  $\beta/2$  sur les intervalles  $]\alpha, +\infty[$  et  $]-\infty, \alpha[$ . Ainsi, d'après le lemme de Rolle, il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

## **Approfondissements**

18. (a) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par

$$x \mapsto (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) - (f(x) - g(a))(g(b) - g(a))$$

Cete fonction vérifie les mêmes hypothèses que  $f$  et l'on a  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ , ainsi d'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ , c'est-à-dire

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

(b) D'après le théorème des accroissements finis, pour tout  $x \neq x_0$ , il existe  $x' \neq x_0$  tel que

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0)g'(x') \neq 0$$

car  $g'$  ne s'annule pas sur  $I$ . Ainsi le quotient de l'énoncé est-il défini pour tout  $x \neq x_0$ . Soit  $x \neq x_0$ . D'après le résultat de la question 1., il existe  $c_x$  appartenant à  $]x_0, x[$  ou  $]x, x_0[$  tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Comme  $x_0 < c_x < x$  ou  $x < c_x < x_0$ , d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c_x = x_0$$

puis par composition des limites,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = e$$

19. (a) On considère les fonctions définies par

$$\phi(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a, \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } a < x \leq b. \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b, \\ \frac{f(b) - f(x)}{b - x} & \text{si } a \leq x < b. \end{cases}$$

Comme quotient de fonctions continues, la fonction  $\phi$  est continue sur l'intervalle  $]a, b]$ . Comme  $f$  est dérivable en  $a$ ,

$$\phi(a) = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x),$$

donc  $\phi$  est aussi continue en  $x = a$ .

On justifie de manière analogue la continuité de  $\psi$  sur le segment  $[a, b]$ .

(b) Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont continues sur le segment  $[a, b]$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\phi$  prend toutes les valeurs comprises entre  $\phi(a) = f'(a)$  et  $\phi(b)$  et  $\psi$  prend toutes les valeurs comprises entre  $\psi(a)$  et  $\psi(b) = f'(b)$ . Or  $\psi(a) = \phi(b)$  !

Voici les différents cas possibles, selon la valeur du réel  $\gamma = \psi(a) = \phi(b)$  :

- si  $\gamma < 0 < f'(b)$ , alors il existe  $x \in ]a, b[$  tel que  $\psi(x) = 0$  ;
- si  $f'(a) < 0 < \gamma$ , alors il existe  $x \in ]a, b[$  tel que  $\phi(x) = 0$  ;
- si  $\gamma = 0$ , alors  $\psi(a) = \phi(b) = 0$ .

Mais d'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall x \in ]a, b], \exists c \in ]a, b[, \quad \phi(x) = f'(c)$$

et

$$\forall x \in [a, b[, \exists c \in ]a, b[, \quad \psi(x) = f'(c)$$

Ainsi, qu'elle soit ou non continue, l'application  $f'$  vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (théorème attribué à Darboux).

20. L'inégalité de l'énoncé implique que  $f$  est bornée (entre -1 et 1) et que  $f'$  est négative. Ainsi  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$  et, d'après le théorème de la limite monotone, admet des limites finies en  $-\infty$  et  $+\infty$ .  
Supposons que  $f$  admette une limite non nulle en  $+\infty$ . Alors il existe  $c > 0$  et  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $|f(x)| \geq c$  pour  $x \geq A$ . Si on pose  $d = \sqrt{1 - c^2} - 1 < 0$ , alors  $f'(x) \leq d$  pour  $x \geq A$ . Mais, d'après le théorème des accroissements finis,  $f(x) - f(A) \leq d(x - A)$  pour  $x \geq A$ . Ceci implique que  $\lim_{+\infty} f = -\infty$  et donc une contradiction. Ainsi  $\lim_{+\infty} f = 0$ .  
On prouve de la même manière que  $\lim_{-\infty} f = 0$ .  
La décroissance de  $f$  permet alors de conclure que  $f$  est nulle.
21. Notons  $a$  et  $b$  les abscisses respectives de A et B. Pour simplifier, nous supposons  $a < b$ . Le fait que B soit sur la tangente à  $\mathcal{C}$  en A se traduit par :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) \text{ ou encore } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$$

De même, on cherche donc un point  $M$  d'abscisse  $c$  vérifiant :

$$f(a) = f(c) + f'(c)(a - c)$$

Définissons une fonction  $g$  sur  $I$  par  $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pour } x \in I \setminus \{a\} \\ g(a) = f'(a) \end{cases}$ .

$g$  est continue sur  $]a, b]$  comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Comme  $f$  est dérivable en  $a$ ,  $g$  est continue en  $a$ .  $g$  est donc continue sur  $[a, b]$ . De plus,  $g$  est dérivable sur  $]a, b[$  comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Enfin,  $g(b) = g(a) = f'(a)$ . D'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ . Or pour  $x \in ]a, b[$ ,  $g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2}$ . On a donc

$$f'(c)(c - a) - f(c) + f(a) = 0$$

ce qui est bien l'égalité annoncée plus haut.