DÉRIVATION

▶ Gammes calculatoires

1. Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes, en précisant leurs domaines de dérivabilité :

   (a) $\ln(\ln(x))$; (c) $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$; (e) $\ln\left(\sqrt{1-2\sin^2(x)}\right)$;

   (b) $\arctan(\ln(x))$; (d) $\left(\cos^2(x)+\frac{3}{2}\right)\sin(2x)$; (f) $\dfrac{\cos(x)+x\sin(x)}{\sin(x)-x\cos(x)}$.

2. Pour $n \geq 1$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_n : x \mapsto x^{n-1}e^{1/x}$. On pose également $g_n = f_n^{(n)}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de g_n et établit que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g_{n+1}(x) = xg_n'(x) + (n+1)g_n(x)$$
   (b) . Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{1/x}$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+a}{1-ax}\right)$.
   (a) Étudier la dérivabilité de la fonction f. Est–elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de dérivabilité ?
   (b) Donner une expression alternative de la fonction f.

▶ Fonctions dérivables et de classe $\mathscr{C}^k$

4. On considère la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}$:
   $$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
   $$x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$
   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction polynomiale P_n tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}f(x) .$$
   (c) En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0 et calculer $f^{(n)}(0)$.

5. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ sans y être de classe $\mathscr{C}^1$.

6. Démontrer que la fonction tangente hyperbolique admet une réciproque définie sur un ensemble à déterminer et calculer sa dérivée.

7. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

▶ Théorème de Rolle, accroissements finis

8. En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer les inégalités suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq |x|$; (b) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
9. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable admettant une même limite en $+\infty$ et $-\infty$. Prouver l'existence d'un réel x tel que $f'(x) = 0$.
10. Etudier la limite en $+\infty$ de l'expression

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$$

11. Soit P une fonction polynomiale ; démontrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.
12. On considère la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ ainsi que la suite $(u_n)_n$ vérifiant $u_0 = 3$ et $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$.
    (a) Démontrer que f admet un point fixe, que nous noterons α.
    (b) Justifier que $\forall n \geq 0,\ u_n \in \mathbb{R}_+$.
    (c) Montrer que $\forall n \geq 0,\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$. En déduire que $(u_n)_n$ converge (vers quelle limite ?).
13. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

▶ Fonctions convexes

14. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$; montrer que :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,.$$

15. Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$ une fonction convexe. Démontrer que :

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

16. Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$; démontrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\,.$$

17. *Inégalités de Young et Hölder.* Soient $p, q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
    (a) Démontrer que pour tous $x, y > 0$, on a $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.
    (b) En déduire que pour tous $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\,.$$

▶ Approfondissements

18. *Règle de l'Hôpital.*
   (a) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
   $$g'(c)(f(b)-f(a)) = f'(c)(g(b)-g(a)).$$
   (b) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f et g deux fonctions définies et continues sur I, dérivables sur $I \setminus \{x_0\}$ telles que $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$ et vérifiant que
   $$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$
   Démontrer que :
   $$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell\,.$$
19. *Théorème de Darboux.* Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f^2 + (1+f')^2 \leq 1$. Montrer que f est nulle.
21. Soient f dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, A et B deux points distincts de sa courbe représentative $\mathscr{C}$ tels que B soit sur la tangente à $\mathscr{C}$ en A. Montrer qu'il existe un point M de $\mathscr{C}$, distinct de A, tel que A soit sur la tangente à $\mathscr{C}$ en M.

▶ Exercices CCINP

$\boxed{3}$

1. On pose $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

$\boxed{4}$

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$
3. Prouver que l'implication :
   $$(\ f \text{ est dérivable en } x_0) \Longrightarrow (f' \text{ admet une limite finie en } x_0\ )$$
   est fausse. *Indication :* on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.