Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

▶ Divisibilité, PGCD, PPCM

1. Déterminer le pgcd et une relation de Bézout associés aux entiers 155 et 94.
2. Soient $n, p \in \mathbb{Z}$. Montrer que :
$$(7 \mid x^2 + y^2) \iff (7 \mid x \text{ et } 7 \mid y)\,.$$
3. Résoudre les systèmes suivants :
(a) $\begin{cases} x \wedge y = 3 \\ x \vee y = 135 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + y = 100 \\ x \wedge y = 10 \end{cases}$.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{2021} par 3.
5. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $b \neq 0$. Démontrer que :
$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}\,.$$
6. On considère la suite (F_n) définie par ses premiers termes $\mathrm{F}_0 = 0$ et $\mathrm{F}_1 = 1$ et par la relation de récurrence $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{F}_{n-1}\,\mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_n^2 = (-1)^n$. Déterminer le pgcd de F_n et F_{n-1}.
   (b) Montrer que pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,
$$\mathrm{F}_{n+p} = \mathrm{F}_p\,\mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_{p-1}\,\mathrm{F}_n\,.$$
   En déduire que $\mathrm{F}_n \wedge \mathrm{F}_p = \mathrm{F}_{n+p} \wedge \mathrm{F}_p$.
   (c) Démontrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{F}_m \wedge \mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{m \wedge n}$.
7. Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.
8. Montrer que la plus grande puissance de 2 divisant $5^{2^n} - 1$ est 2^{n+2}.

▶ Entiers premiers entre eux

9. Déterminer les entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $5x^2 + 2xy - 3 = 0$.
10. Soit $n \in \mathbb{Z}$; démontrer que les entiers $20n^2 + 4n + 5$ et $10n^2 + 2n + 2$ sont premiers entre eux.
11. Résoudre les équations diophantiennes suivantes :
(a) $15x + 6y = 3$; (b) $42x + 28y = 14$; (c) $9x + 270y = 7$.
12. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fraction rationnelle $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ est–elle irréductible ?
13. L'équation $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$ admet–elle des solutions rationnelles ?
14. Soient a et b deux entiers non nuls premiers entre eux.
   (a) Déterminer le pgcd de $a + b$ et ab.
   (b) Démontrer que $a^2 \wedge b^2 = 1$ et exprimer les coefficients de Bézout de a^2 et b^2 en fonction de ceux de a et b.
15. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. Montrer que $a \wedge bc = a \wedge c$ pour tout $c \in \mathbb{Z}$.
16. Déterminer les entiers $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

▶ Nombres premiers

17. Pour $n \geq 2$, on appelle n–ième *nombre de Mersenne* l'entier $M_n = 2^n - 1$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, si M_n est premier alors n l'est.
   (b) Que dire de la réciproque ?
18. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $D(n)$ la somme de tous les diviseurs strictement positifs de n et $\mathrm{Div}(n)$ l'ensemble de ces derniers.

(a) Calculer $D(n)$ pour n compris entre 1 et 17.
(b) Déterminer $D(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \geq 1$.
(c) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned}\pi : \mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b) &\to \mathrm{Div}(ab) \\ (d_1, d_2) &\mapsto d_1 d_2\end{aligned}$$

est bijective. En déduire que $D(ab) = D(a)D(b)$.
(d) Donner une méthode permettant, connaissant un entier n et sa décomposition en produit de facteurs premiers, de calculer $D(n)$. En déduire $D(2021)$.

▶ Approfondissements

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^{10^n} \equiv 4\,[7]$.
20. *Formule de Legendre.*
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que :
   $$\left\lfloor \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor .$$
   (b) En déduire que si p est un nombre premier et $n \in \mathbb{N}$ alors :
   $$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{k} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor , \quad \text{avec} \quad k = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor .$$
21. Montrer que si p est un entier premier différent de 2 et 5 , alors il divise un des entiers de l'ensemble $\{1, 11, 111, 1111, \ldots\}$.
22. Montrer que la somme de deux nombres premiers consécutifs ne peut pas être égale au produit de deux nombres premiers.

▶ Exercices CCINP

86

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!], p$ divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k\,!$ puis en déduire que p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \bmod p$. *Indication :* procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

94

1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système
   $$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & \equiv & 5 \quad [6] \\ x & \equiv & 4 \quad [8] \end{array} \right.$$
   n'a pas de solution x appartenant à $\mathbb{Z}$.
2. (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{Z}$. Prouver que :
   $$(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Longleftrightarrow (ab \mid c) .$$
3. On considère le système
   $$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & \equiv & 6 \quad [17] \\ x & \equiv & 5 \quad [16] \\ x & \equiv & 4 \quad [15] \end{array} \right.$$
   dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S). *On exprimera les solutions en fonction de la solution particulière* x_0.