

LIMITES ET CONTINUITÉ

► Vrai ou faux ?

(A) *Toute fonction continue est bornée.*

Faux. C-EX : Les fonctions affine.

(B) *Toute fonction bornée est continue.*

Faux. C-EX : $\mathbb{1}_{\{0\}}$

(C) *La somme de deux fonctions croissantes est croissante.*

Vrai. Poser $h(x) = f(x) + g(x)$, donc $h'(x) = f'(x) + g'(x) \geq 0$

(D) *Le quotient de deux fonctions continues est continu.*

Faux.

(E) *La fonction valeur absolue est continue en 0 .*

Vrai, $|x| \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} 0$

(F) *Soit f une fonction définie au voisinage de 0 . Alors $\left(f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3\right) \Leftrightarrow \left(f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 3\right)$.*

Faux. C-EX : Avec $f(x) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ on a :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 3 \cos(2\pi n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 3$$

et :

$$f(x) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \text{indeterminé}$$

(G) *Si f est une fonction continue sur \mathbb{R} , alors $g : x \mapsto f(\pi x + \sqrt{17})$ est continue sur \mathbb{R} .*

Vrai, car g est composée de deux fonctions continues.

(H) *La fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 .*

Vrai par caractérisation séquentielle de la limite (prendre les suites $\frac{1}{2\pi n}$ et $\frac{1}{2\pi n + \pi}$)

► Limites

1. *Enoncé : En quels points de \mathbb{R}_+ la fonction $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ admet-elle une limite ?*

Posons la fonction

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

f est croissante (composé de $\sqrt{\cdot}$ et de $\lfloor \cdot \rfloor$).

Donc par théorème de la limite monotone :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ existe} \\ \forall a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \text{existe} \\ \forall a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \text{existe} \end{cases}$$

Si $a \notin \mathbb{N}$, alors si on pose $n = \lfloor \sqrt{a} \rfloor$, on a :

$$\text{Au voisinage de } a, \quad \text{pour } x \in [n^2, n^2 + 1[\quad f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \xrightarrow[x \rightarrow a]{} n$$

Le résultat est le même si $a \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}$

Si $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $a = k^2$ et $\lfloor \sqrt{a} \rfloor = k$.

Si $x < a$, alors $\sqrt{x} < k$.

Donc $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leq k - 1$.

Et :

Au voisinage de a , pour $x \in [(k-1)^2, k^2[$ $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = k - 1$

Donc $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \xrightarrow{x \rightarrow a^-} k - 1$.

Si $x > a$, alors $\sqrt{x} = k$ au voisinage de a et $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \xrightarrow{x \rightarrow a^+} k$.

2. *Énoncé : Déterminer les limites éventuelles des expressions suivantes aux points considérés :*

(a) $x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ quand $x \rightarrow +\infty$;

Comme $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$ pour $x > 1$, on a :

$$x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0 \text{ pour } x > 1$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$$

(b) $x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ quand $x \rightarrow 0^+$;

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - 1 &< \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x} \\ 1 - x &< x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1 \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$. Donc par le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$$

(c) $\frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$;

Posons :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

De manière à ce que :

$$g \circ f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Donc par composition de limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

(d) $\frac{x^x}{[x]^{|x|}}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Posons :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^x}{[x]^{|x|}} \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \frac{n^n}{n^{|n|}} \\ &= \frac{n^n}{n^n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et, on a :

$$\begin{aligned} \varphi\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{[n]^{|n+\frac{1}{2}|}} \\ &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{|n+\frac{1}{2}|}} \\ &= \frac{e^{(n+\frac{1}{2}) \ln(n+\frac{1}{2})}}{e^{|n+\frac{1}{2}| \ln(n)}} \\ &= e^{(n+\frac{1}{2}) \ln(n+\frac{1}{2}) - |n+\frac{1}{2}| \ln(n)} \\ &= e^{(n+\frac{1}{2}) \ln\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\right)} \\ &= e^{(n+\frac{1}{2}) \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \\ &= e^{n \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \times e^{\frac{1}{2} \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \end{aligned}$$

Etudions $n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$:

Posons :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Alors on remarque que :

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 0}{\frac{1}{n}} = n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(0)$$

Or,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2+x}$$

Donc $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

. Et donc

$$\varphi\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{[n]^{n+\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Donc, φ n'admet pas de limite en $+\infty$.

3. *Enoncé* : Soit f une fonction périodique sur \mathbb{R} admettant une limite en $+\infty$; montrer que f est constante.

Soit f une fonction périodique sur \mathbb{R} tel que f admet une limite l en $+\infty$.

On a :

$$f \text{ est périodique} \Leftrightarrow \exists T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0 \quad f(x + nT) = f(x)$$

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ et T une période de f .

$$\forall n \geq 0, \begin{cases} f(x_0) = f(x_0 + nT) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \bar{\mathbb{R}} \\ f(x_0 + nT) = f(x_0 + nT) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0) \end{cases}$$

Donc par unicité de la limite, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x_0) = l$$

Donc la fonction f est constante.

4. *Enoncé* : Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ croissante telle que la suite $(f(n))_n$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ croissante telle que la suite $(f(n))_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Montrons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$.

Comme $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, f(n) > M$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \geq N$. Alors, comme f est croissante, on a :

$$f(x) \geq f(N) > M$$

Donc, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \geq N, f(x) > M$.

Ainsi, on a montré que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

► Fonctions continues

5. *Énoncé* : Étudier la continuité de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Si $x \in [a, a + 1[$, alors $\lfloor x \rfloor = a$ et donc :

$$f(x) = (x - a)^2 \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 0$$

Si $x \in [a - 1, a[$, alors $\lfloor x \rfloor = a - 1$ et donc :

$$f(x) = (x - (a - 1))^2 = (x - a + 1)^2 \xrightarrow{x \rightarrow a^-} 1$$

La limite à gauche de f en a est différente de celle à droite, donc f n'est pas continue en a .

Donc la fonction n'est pas continue sur \mathbb{R} .

Donc la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ car

6. *Énoncé* : On se donne une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$ et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x) \cos(x)$$

(a) Exprimer, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

$$\text{Soit } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f \text{ est continue} \\ \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos(x) \end{cases} .$$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(2 \times \frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc par récurrence, on a :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

(b) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \frac{\sin(x)}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \geq 0, \quad P(n) : \text{''} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \frac{\sin(x)}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \text{''}$$

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2^0}\right) f(x) &= \sin(x) f(x) \\ &= \frac{\sin(x)}{2^0} f\left(\frac{x}{2^0}\right)\end{aligned}$$

Donc $P(0)$ est vrai.

Hérédité :

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vrai, c'est-à-dire :

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \frac{\sin(x)}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Montrons que $P(n+1)$ est vrai, c'est-à-dire :

$$\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f(x) = \frac{\sin(x)}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f(x) &= \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \times f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \times f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x)}{f\left(\frac{x}{2^n}\right)} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sin(x)}{2^n} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \quad \text{Par H.R.} \\ &= \frac{\sin(x)}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vrai.

(c) *En déduire l'expression générale de f pour $x \neq 0$. Conclure.*

Soit $x \neq 0$, alors $\forall n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) &= \frac{\sin(x)}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \\ 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) &= \sin(x) f\left(\frac{x}{2^n}\right) \\ \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) - \sin(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} f(x) &= \frac{\sin(x)}{x} f\left(\frac{x}{2^n}\right)\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on a :

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(0) & \text{par continuité de } f \\ \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) - \sin(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \cos(0) = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\forall x \neq 0, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x} f(0) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Et comme :

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Alors, f est bien la fonction $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ continue sur \mathbb{R} .

7. *Enoncé : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Démontrer que f est continue.*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante.

Montrons que f est continue.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors notons :

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{et} \quad l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Comme f est croissante, on a : $l_1 \leq l_2$.

Par composition des limites, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{x} = \frac{l_1}{x_0} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{l_2}{x_0}$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante, donc :

$$\frac{l_1}{x_0} \geq \frac{l_2}{x_0}$$

Mais comme $x_0 > 0$, on peut diviser par x_0 :

$$l_1 \geq l_2$$

Par conséquent, on a :

$$l_1 = l_2$$

Donc la limite à gauche de f en x_0 est égale à la limite à droite de f en x_0 .

Donc f est continue en x_0 , elle est donc continue sur \mathbb{R}_+^* .

8. *Enoncé : Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telles que :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Analyse :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

On remarque que :

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$

Donc :

$$f(0) = 0$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(n) = f\left(\sum_{k=1}^n 1\right) = \sum_{k=1}^n f(1) = nf(1)$$

Posons $a = f(1)$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x - x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$$

Donc :

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(-n) = -f(n) = -na$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = an$$

Soit $x \in \mathbb{Q}$, alors $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \frac{p}{q}$ avec $q \neq 0$. On a :

$$f(qx) = f(p) = pa \quad \text{et} \quad f(qx) = qf(x)$$

Mais également :

$$f(qx) = f(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{q \text{ fois}}) = qf(x)$$

Donc :

$$qf(x) = pa$$

Donc :

$$f(x) = \frac{pa}{q}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = ax$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors par caractérisation séquentielle de la densité :

$$\exists (x_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$$

Soit $n \geq 0$, alors on a :

$$f(x_n) = ax_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} ax \text{ par continuité de } f$$

Donc, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax$$

Synthèse :

Si l'on pose :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Donc, les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont de la forme :

$$f(x) = ax \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$

► Valeurs intermédiaires

9. *Enoncé : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$; démontrer que f est bornée.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$.

Donc $\exists l, l' \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l' \end{cases}$$

Donc $\exists M, m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} f_{[M, +\infty[} \text{ est bornée} \\ f_{]-\infty, m]} \text{ est bornée} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [M, +\infty[, \quad |f(x)| \leq K \\ \exists L \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]-\infty, m], \quad |f(x)| \leq L \end{cases}$$

Par théorème des bornes atteintes, f est bornée sur $[m, M]$.

Donc

$$\exists H \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [m, M], \quad |f(x)| \leq H$$

Donc au final, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq \max(K, L, H)$$

Donc f est bornée.

10. *Enoncé : Soit S un segment non vide et soit $f \in \mathcal{C}^0(S, S)$. Démontrer que f admet un point fixe. Ce résultat reste-t-il vrai sur un intervalle quelconque ?*

Posons $S = [a, b]$ avec $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue.

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. tel que $\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{cases}$

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\begin{aligned} \exists x \in [a, b], \quad g(x) &= 0 \\ f(c) - c &= 0 \\ f(c) &= c \end{aligned}$$

Donc f admet un point fixe.

Non, ce résultat ne reste pas vrai sur un intervalle quelconque. Par exemple, la fonction $f(x) = x + 1$ définie sur \mathbb{R} n'a aucun point fixe, car $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

11. *Enoncé* : Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ et $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Comme f est continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, elle y est bornée et atteint ses bornes. Donc, $\exists x_m, x_M, m, M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} f(x_m) &= m \\ f(x_M) &= M \end{aligned}$$

Et comme f est continue sur $[0, 1]$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad m \leq f(x) \leq M$$

En particulier, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$m \leq f(x_k) \leq M.$$

En prenant la moyenne :

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \leq M.$$

Posons :

$$\bar{f}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

On a donc $\bar{f}_n \in [m, M] \subset f([0, 1])$, puisque $f([0, 1])$ est un intervalle (image d'un intervalle par une fonction continue).

Considérons la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = f(x) - \bar{f}_n.$$

La fonction g est continue sur $[0, 1]$.

De plus, on a :

$$g(x_m) = f(x_m) - \bar{f}_n \leq 0 \quad \text{et} \quad g(x_M) = f(x_M) - \bar{f}_n \geq 0.$$

Donc, $g(x_m)$ et $g(x_M)$ ont des signes opposés.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [x_m, x_M]$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$f(x) = \bar{f}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

12. *Enoncé* : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction croissante. En considérant la fonction $g : x \mapsto f(x) + x$, démontrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -x$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction croissante.

Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) + x$.

g est strictement croissante par croissance de f et croissance de $x \mapsto x$ sur \mathbb{R} .

La fonction f est continue sur \mathbb{R} , donc g est continue sur \mathbb{R} .

Montrons que $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $g(\alpha) < 0 < g(\beta)$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_0 > |f(0)|$, alors on considère les deux points suivants :

$$\alpha = -x_0, \quad \beta = x_0.$$

Par croissance de f , on a :

$$f(\alpha) \leq f(0) \leq f(\beta).$$

Donc :

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= f(\alpha) + \alpha \leq 0, \\ g(\beta) &= f(\beta) + \beta \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $g(\alpha) < 0 < g(\beta)$. Comme g est continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists x \in [\alpha, \beta], \quad g(x) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$f(x) + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = -x.$$

Comme g est strictement croissante, il y a unicité de la solution.

Autre méthode : Appliquer l'exercice 13 à la fonction g .

13. *Enoncé :* Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < 0$ et $b > 0$. Démontrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tendant vers a en $-\infty$ et b en $+\infty$ s'annule.

Soit a, b deux réels tel que :

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} a \in \overline{\mathbb{R}}_-^* \\ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b \in \overline{\mathbb{R}}_+^* \end{cases}$$

Comme $a < 0$, alors $\exists V \in V(a)$ tel que $V \subset \mathbb{R}_-^*$.

Si $a = -\infty$, alors prenons $V =]-\infty, -1[$.

Si $a \in \mathbb{R}_-^*$, alors prenons $V =]a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2}[$.

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} a$, alors :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \leq m, f(x) \in V$$

En particulier, on a :

$$\forall x \leq m, f(x) < 0$$

De la même manière, $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \geq M, f(x) > 0$$

Comme $f \in \mathcal{C}^0([m, M])$, alors par théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists c \in [m, M], \quad f(c) = 0$$

► Bijections continues

14. *Enoncé* : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f \in \mathcal{C}^0(]a, b[)$ telle que f admette une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a et b . Démontrer que f n'est pas injective.

Supposons que f est injective.

Alors comme toute fonction continue sur un intervalle à valeurs réelles injective est strictement monotone, f est strictement monotone.

Donc par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $f(]a, b[)$.

Ce qui est absurde car $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell$.

Donc f n'est pas injective.

15. *Enoncé* : Démontrer qu'il existe une unique fonction $f : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ telle que $\forall x \in [0, 2], f(x)^5 + f(x) = x$. Établir sa continuité.

Remarquons que la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(y) = y^5 + y$ est strictement croissante sur ce segment.

Puisqu'elle est continue, elle réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 2]$.

On a donc, pour tout $1 \leq x \leq 2$ et $\forall y \in [0, 1], g(y) = y^5 + y = x$ si et seulement si $y = g^{-1}(x)$.

La fonction f existe donc et est unique car $f = g^{-1}$.

La fonction f étant la bijection réciproque d'une fonction continue, elle est continue.

16. *Enoncé* : Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ telle que $f(0) = 0$ et $f \circ f = \text{id}_{[0, 1]}$. Montrer que $f = \text{id}_{[0, 1]}$. *Indication* : on pourra commencer par démontrer que f est strictement monotone.

Puisque $f \circ f = \text{id}_{[0, 1]}$, f est une bijection de l'intervalle $[0, 1]$ sur lui-même. En tant que bijection continue sur un intervalle, elle est strictement monotone (cf. le cours).

Raisonnons par l'absurde en supposant f strictement décroissante. On aurait alors $0 = f(0) > f(1)$ et donc $f(1) < 0$, ce qui est absurde car f est à valeurs dans $[0, 1]$.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) \neq \alpha$. Si $f(\alpha) < \alpha$, par stricte croissance de f , on a

$$\alpha = f(f(\alpha)) < f(\alpha)$$

ce qui est absurde. De même, si $f(\alpha) > \alpha$, par stricte croissance de f , on a

$$\alpha = f(f(\alpha)) > f(\alpha)$$

ce qui est absurde. On aboutit donc dans tous les cas de figure à une absurdité.

► Approfondissement

17. *Enoncé* : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante telle que $f(2x) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que

$$\frac{f(x)}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Montrons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(2^n)}{n} = 0$. Posons $u_n = f(2^{n+1}) - f(2^n)$. Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\frac{f(2^n)}{n} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}}{n} + \frac{f(1)}{n}$$

Par moyenne de Césaro (TD 7), on a alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(2^n)}{n} = 0$$

Soit maintenant $x \in]1; +\infty[$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$: il suffit de prendre $n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$ pour avoir ;

$$0 \leq \frac{f(x)}{\ln x} \leq \frac{f(2^{n+1})}{n \ln 2}$$

Or $n \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(2^{n+1})}{n \ln 2} \rightarrow 0$ d'après ce qui précède, d'où le résultat.

18. *Enoncé : Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :*

$$\forall n \geq 1, \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$$

Soit

$$g \begin{cases} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \end{cases}$$

Il suffit de montrer que g s'annule. Or, g est continue et

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Les $g\left(\frac{k}{n}\right)$ ne peuvent pas être tous strictement positifs ou négatifs, donc il existe $k_1, k_2 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que $g\left(\frac{k_1}{n}\right) \leq 0$ et $g\left(\frac{k_2}{n}\right) \geq 0$. Si $k_1 = k_2$, g s'annule évidemment et si $k_1 \neq k_2$, g s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

19. *Enoncé : Soient f et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.*

(a) *On note F l'ensemble des points fixes de f . Montrer que F est non vide et admet un maximum et un minimum.*

On a $f(0) \in [0, 1]$ donc $f(0) \geq 0$. De même, $f(1) \in [0, 1]$ donc $f(1) \leq 1$. Ainsi l'application continue $x \mapsto f(x) - x$ prend une valeur positive et une valeur négative sur $[0, 1]$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que cette application s'annule sur $[0, 1]$ i.e. que f admet un point fixe, donc $F \neq \emptyset$. De plus, $F \subset [0, 1]$ donc F est borné. Ainsi F admet une borne inférieure a et une borne supérieure b . Il existe donc deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ d'éléments de F convergeant respectivement vers a et b . On a $f(a_n) = a_n$ et $f(b_n) = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme f est continue, on a $f(a) = a$ et $f(b) = b$ par passage à la limite. Ainsi $a, b \in F$ donc $a = \min F$ et $b = \max F$.

(b) *Montrer que $g(F) \subset F$.*

Soit $x \in F$. Alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$ car $f(x) = x$. Ainsi $g(x)$ est un point fixe de f .

(c) *Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.*

Supposons que $f - g$ ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Alors $f - g$ est de signe constant sur $[0, 1]$. Supposons que $f - g > 0$. On a donc $f(a) > g(a)$ et donc $g(a) < a$ car a est un point fixe de f . Or, d'après la question précédente, $g(a)$ est également un point fixe de f . Mais a est le plus petit point fixe de f : il y a contradiction. Supposons que $f - g < 0$. On a donc $f(b) < g(b)$ et donc $g(b) > b$ car b est un point fixe de f . Or, d'après la question précédente, $g(b)$ est également un point fixe de f . Mais b est le plus grand point fixe de f : il y a également contradiction. Par conséquent $f - g$ s'annule sur $[0, 1]$.

20. *Énoncé : Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et telle que*

$$\forall x \in \left[0, \frac{7}{10}\right], \quad f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$$

Montrer que f s'annule au moins 7 fois sur $[0, 1]$.

Notons, pour tout $x \in [0, 7/10]$,

$$g(x) = f(x + 3/10) - f(x)$$

La fonction g est continue en tant que somme de deux fonctions continues et ne s'annule pas. On déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle est de signe constant sur l'intervalle $[0, 7/10]$. Quitte à considérer $-f$ plutôt que f , on peut supposer que $g > 0$. remarque alors que

$$\begin{aligned} g(0) &= f(3/10) - f(0) = f(3/10) > 0 \\ g(0) + g(3/10) &= f(6/10) - f(0) = f(6/10) > 0 \\ g(0) + g(3/10) + g(6/10) &= f(9/10) - f(0) = f(9/10) > 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g(7/10) &= f(1) - f(7/10) = -f(7/10) > 0 \\ g(7/10) + g(4/10) &= f(1) - f(4/10) = -f(4/10) > 0 \\ g(7/10) + g(4/10) + g(1/10) &= f(1) - f(1/10) \\ &= -f(1/10) > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue f s'annule sur les intervalles

$$]1/10, 3/10[,]3/10, 4/10[,]4/10, 6/10[,]6/10, 7/10[$$

et $]7/10, 9/10[$. Comme $f(0) = f(1) = 0$, on en déduit que f s'annule au moins 7 fois sur $[0, 1]$.