TD 9

Approfondissements

17. Montrons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}^*, \lim_{n\to+\infty} \frac{f(2^n)}{n} = 0$. Posons $u_n = f\left(2^{n+1}\right) - f\left(2^n\right)$. Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\frac{f\left(2^n\right)}{n} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}}{n} + \frac{f(1)}{n}$$

Par moyenne de Césaro (TD 7), on a alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(2^n\right)}{n} = 0\,.$$

Soit maintenant $x \in]1; +\infty[$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$: il suffit de prendre $n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$ pour avoir ;

$$0 \leq \frac{f(x)}{\ln x} \leq \frac{f\left(2^{n+1}\right)}{n \ln 2}\,.$$

Or $n \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ et $\frac{f\left(2^{n+1}\right)}{n\ln 2} \to 0$ d'après ce qui précède, d'où le résultat.

18. Soit

$$g \left\{ \begin{array}{rcl} \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x) \end{array} \right.$$

Il suffit de montrer que g s'annule. Or, g est continue et

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Les $g\left(\frac{k}{n}\right)$ ne peuvent pas être tous strictement positifs ou négatifs, donc il existe $k_1, k_2 \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $g\left(\frac{k_1}{n}\right) \leq 0$ et $g\left(\frac{k_2}{n}\right) \geq 0$. Si $k_1 = k_2, g$ s'annule évidemment et si $k_1 \neq k_2, g$ s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

19. (a) On a $f(0) \in [0,1]$ donc $f(0) \geq 0$. De même, $f(1) \in [0,1]$ donc $f(1) \leq 1$. Ainsi l'application continue $x \mapsto f(x) - x$ prend une valeur positive et une valeur négative sur $[0,1]$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que cette application s'annule sur $[0,1]$ i.e. que f admet un point fixe, donc $F \neq \emptyset$. De plus, $\mathrm{F} \subset [0,1]$ donc F est borné. Ainsi F admet une borne inférieure a et une borne supérieure b. Il existe donc deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ d'éléments de F convergeant respectivement vers a et b. On a $f(a_n) = a_n$ et $f(b_n) = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme f est continue, on a $f(a) = a$ et $f(b) = b$ par passage à la limite. Ainsi $a, b \in$ F donc $a = \min \mathrm{F}$ et $b = \max \mathrm{F}$.

(b) Soit $x \in \mathrm{F}$. Alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$ car $f(x) = x$. Ainsi $g(x)$ est un point fixe de f.

(c) Supposons que $f - g$ ne s'annule pas sur $[0,1]$. Alors $f - g$ est de signe constant sur $[0,1]$. Supposons que $f - g > 0$. On a donc $f(a) > g(a)$ et donc $g(a) < a$ car a est un point fixe de f. Or, d'après la question précédente, $g(a)$ est également un point fixe de f. Mais a est le plus petit point fixe de f : il y a contradiction. Supposons que $f - g < 0$. On a donc $f(b) < g(b)$ et donc $g(b) > b$ car b est un point fixe de f. Or, d'après la question précédente, $g(b)$ est également un point fixe de f. Mais b est le plus grand point fixe de f : il y a également contradiction. Par conséquent $f - g$ s'annule sur $[0,1]$.

21. Notons, pour tout $x \in [0, 7/10]$,

$$g(x) = f(x + 3/10) - f(x)$$

La fonction g est continue en tant que somme de deux fonctions continues et ne s'annule pas. On déduit alors du théorème des valeu intermédiaires qu'elle est de signe constant sur l'intervalle $[0, 7/10]$. Quitte à considérer $-f$ plutôt que f, on peut supposer que $g > 0$. remarque alors que

$$g(0) = f(3/10) - f(0) = f(3/10) > 0$$
$$g(0) + g(3/10) = f(6/10) - f(0) = f(6/10) > 0,$$
$$g(0) + g(3/10) + g(6/10) = f(9/10) - f(0) = f(9/10) > 0$$

et

$$
\begin{aligned}
&g(7/10) = f(1) - f(7/10) = -f(7/10) > 0\\
&g(7/10) + g(4/10) = f(1) - f(4/10) = -f(4/10) > 0,\\
&g(7/10) + g(4/10) + g(1/10) = f(1) - f(1/10)\\
&= -f(1/10) > 0.
\end{aligned}
$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue f s'annule sur les intervalles

$$]1/10, 3/10[,]3/10, 4/10[,]4/10, 6/10[,]6/10, 7/10[$$

et $]7/10, 9/10[$. Comme $f(0) = f(1) = 0$, on en déduit que f s'annule au moins 7 fois sur $[0, 1]$.