

LIMITES ET CONTINUITÉ

► **Vrai ou faux ?**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire (en justifiant par une preuve ou un contre-exemple) si elle est vraie ou fausse.

- (A) Toute fonction continue est bornée.
- (B) Toute fonction bornée est continue.
- (C) La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
- (D) Le quotient de deux fonctions continues est continu.
- (E) La fonction valeur absolue est continue en 0.
- (F) Soit f une fonction définie au voisinage de 0. Alors $\left(f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3\right) \Leftrightarrow \left(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3\right)$.
- (G) Si f est une fonction continue sur \mathbb{R} , alors $g : x \mapsto f(\pi x + \sqrt{17})$ est continue sur \mathbb{R} .
- (H) La fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

► **Limites**

1. En quels points de \mathbb{R}_+ la fonction $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ admet-elle une limite ?
2. Déterminer les limites éventuelles des expressions suivantes aux points considérés :

$$(a) \quad x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ quand } x \rightarrow +\infty; \quad (c) \quad \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \text{ quand } x \rightarrow +\infty;$$

$$(b) \quad x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ quand } x \rightarrow 0^+; \quad (d) \quad \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}} \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

3. Soit f une fonction périodique sur \mathbb{R} admettant une limite en $+\infty$; montrer que f est constante.
4. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ croissante telle que la suite $(f(n))_n$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$.

► **Fonctions continues**

5. Étudier la continuité de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2$.
6. On se donne une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 1$ et vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x) \cos(x).$$

- (a) Exprimer, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
- (b) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \frac{\sin(x)}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

- (c) En déduire l'expression générale de f pour $x \neq 0$. Conclure.
7. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Démontrer que f est continue.
 8. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

► Valeurs intermédiaires

9. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$; démontrer que f est bornée.
10. Soit S un segment non vide et soit $f \in \mathcal{C}^0(S, S)$. Démontrer que f admet un point fixe. Ce résultat reste-t-il vrai sur un intervalle quelconque ?
11. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ et $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

12. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction croissante. En considérant la fonction $g : x \mapsto f(x) + x$, démontrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -x$.
13. Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < 0$ et $b > 0$. Démontrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ tendant vers a en $-\infty$ et b en $+\infty$ s'annule.

► Bijections continues

14. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f \in \mathcal{C}^0(]a, b[)$ telle que f admette une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a et b . Démontrer que f n'est pas injective.
15. Démontrer qu'il existe une unique fonction $f : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ telle que $\forall x \in [0, 2], f(x)^5 + f(x) = x$. Établir sa continuité.
16. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ telle que $f(0) = 0$ et $f \circ f = \text{id}_{[0,1]}$. Montrer que $f = \text{id}_{[0,1]}$. *Indication : on pourra commencer par démontrer que f est strictement monotone.*

► Approfondissements

17. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante telle que $f(2x) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
18. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

19. Soit f et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $g \circ f = f \circ g$.
 - (a) On note F l'ensemble des points fixes de f . Montrer que F est non vide et admet un maximum et un minimum.
 - (b) Montrer que $g(F) \subset F$.
 - (c) Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.
20. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que

$$\forall x \in \left[0, \frac{7}{10}\right], \quad f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x).$$

Montrer que f s'annule au moins 7 fois sur $[0, 1]$.

► Exercice CCINP

43 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de $(u_n)_n$.
(b) Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur \mathbb{R} , telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\arctan x)$.