

GROUPES, ANNEAUX ET CORPS

► Groupes

1. *Énoncé : Groupe de Klein. Soient $K = \{e, a, b, c\}$ un ensemble à quatre éléments ; démontrer que la LCI suivante définit une loi de groupe abélien sur K .*

\star	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Stabilité. On observe dans la table que l'opération \star entre deux éléments de K donne toujours un élément de K . Donc l'ensemble est stable par \star .

Élément neutre. On lit sur la première ligne et la première colonne que

$$\forall x \in K, \quad e \star x = x \quad \text{et} \quad x \star e = x$$

Donc e est l'élément neutre.

Inverses. On vérifie que chaque élément est son propre inverse :

$$a \star a = e, \quad b \star b = e, \quad c \star c = e, \quad e \star e = e$$

Donc tout élément admet un inverse dans K .

Associativité. L'associativité ne se lit pas directement sur la table, mais on peut la vérifier à la main en testant les $4^3 = 64$ cas.

Commutativité. La table est symétrique par rapport à la diagonale principale : pour tout $x, y \in K$, on a $x \star y = y \star x$. Donc la loi est commutative.

2. *Énoncé :*

(a) *Soit G un groupe tel que $\forall g \in G, g^2 = e_G$. Montrer que G est abélien.*

Soit $a, b \in G$

Comme $a^2 = e_G$, alors $a = a^{-1}$ (existe car G est un groupe)

De même pour $b = b^{-1}$ et $ab = (ab)^{-1}$

Or $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$

Donc on a bien $ab = ba$ et G est abélien.

(b) *Que dire du cas où $\forall g \in G, g^2 = g$?*

Soit $g \in G$, alors $gg = g$

G est un groupe donc g^{-1} existe et en multipliant par g^{-1} à gauche on a :

$$g^{-1}gg = g^{-1}g \Rightarrow g = e_G$$

Donc :

$$\forall g \in G, g = e_G$$

Et donc :

$$G = \{e\}$$

3. *Enoncé : Démontrer que si H et K sont deux sous-groupes d'un groupe G , alors $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.*

Soit $H, K \subset G$ (sous-groupe).

$\Leftarrow :$

Supposons que $(H \subset K) \vee (H \supset K)$

Alors : $(H \cup K = H) \vee (H \cup K = K)$, donc ok.

$\Rightarrow :$

Par contraposée, supposons que $(H \not\subset K) \wedge (H \not\supset K)$

Donc

$$\exists k \in K \setminus H, \exists h \in H \setminus K$$

Si $H \cup K$ est un sous groupe de G , alors $kh \in H \cup K$ par stabilité.

Or si $kh \in H$, alors $\underbrace{(kh)}_{\in H} \underbrace{h^{-1}}_{\in H} \in H$ et donc $k \in H$.

Donc $kh \in K$, mais alors $k^{-1}(kh) = h \in K$.

Donc $H \cup K$ n'est pas un sous-groupe.

4. *Enoncé : Déterminer tous les morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même.*

Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ un morphisme de groupes (additifs). Posons $k = f(1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, par récurrence immédiate,

$$f(n) = f(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{f(1) + \dots + f(1)}_{n \text{ fois}} = nk.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$, on obtient $f(-n) = -f(n) = -nk$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = kn$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application $\varphi_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\varphi_k(n) = kn$ vérifie

$$\varphi_k(m + n) = k(m + n) = km + kn = \varphi_k(m) + \varphi_k(n),$$

donc est bien un morphisme de groupes.

Conclusion : Les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même sont exactement les applications $n \mapsto kn$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

5. *Enoncé : Démontrer que les groupes \mathbb{R}^* et $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ sont isomorphes.*

Remarque :

$(\mathbb{R} \times \{-1, 1\}, *)$ est un groupe produit de $(\mathbb{R}, +)$, $(\{-1, 1\}, \times)$

Si $(x, \varepsilon), (y, \mu) \in \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$, alors $(x, \varepsilon) * (y, \mu) = (x + y, \varepsilon\mu)$

Posons :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \times \{-1, 1\} \\ x &\mapsto \left(\ln |x|, \frac{x}{|x|} \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} \times \{-1, 1\} &\rightarrow \mathbb{R}^* \\ (\mu, \varepsilon) &\mapsto \varepsilon e^\mu \end{aligned}$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{aligned}\varphi(x \times y) &= (\ln |xy|, \frac{xy}{|xy|}) \\ &= (\ln |x| + \ln |y|, \frac{x}{|x|} \times \frac{y}{|y|}) \\ &= \varphi(x) * \varphi(y)\end{aligned}$$

Donc φ est un morphisme de groupe.

De plus, soit $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}\Psi \circ \varphi(x) &= \Psi(\ln |x|, \frac{x}{|x|}) \\ &= e^{\ln |x|} \times \frac{x}{|x|} \\ &= x\end{aligned}$$

Donc, on a : $\begin{cases} \varphi \circ \Psi = \text{id}_{\mathbb{R} \times \{-1,1\}} \\ \Psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{R}^*} \end{cases}$ Donc φ est un isomorphisme de réciproque Ψ .

6. *Énoncé* : On pose $\Gamma = \{(z \in \mathbb{C}) \mapsto az + b \mid (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$. Démontrer que (Γ, \circ) est un groupe. Est-il abélien ?

Posons : $\Gamma = \{(z \in \mathbb{C}) \mapsto az + b \mid (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$

Montrons que Γ est un sous-groupe.

- $\Gamma \subset \mathfrak{S}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

Soit $f \in \Gamma$, alors $\exists a, b \in \mathbb{C}^*$ tel que $f : z \mapsto az + b$. Posons : $y : z \mapsto -\frac{b}{a} + \frac{z}{a}$

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}, \quad y \circ f(z) &= -\frac{b}{a} + \frac{(az + b)}{a} = z \\ f \circ y(z) &= a \left(-\frac{b}{a} + \frac{z}{a} \right) + b = z\end{aligned}$$

Donc f est bijectif.

- $\forall z \in \mathbb{C}, z = 1 \times z + 0$, donc $\text{id}_{\mathbb{C}} \in \Gamma$.

- Soit $f, g \in \Gamma$, montrons que $f \circ g^{-1} \in \Gamma$

On a : $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}, f(z) &= az + b \\ g(z) &= cz + d\end{aligned}$$

On pose également $g^{-1}(z) = \frac{z}{c} - \frac{d}{c}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}f \circ g^{-1}(z) &= f \left(\frac{z}{c} - \frac{d}{c} \right) \\ &= a \left(\frac{z}{c} - \frac{d}{c} \right) + b \\ &= \underbrace{\left(\frac{a}{c} \right)}_{\in \mathbb{C}^*} z + \underbrace{\left(b - \frac{d}{c} a \right)}_{\in \mathbb{C}}\end{aligned}$$

Donc $f \circ g^{-1} \in \Gamma$.

7. *Énoncé* : Soit $(G, +)$ un groupe abélien et soient H, K deux sous-groupes de G .

(a) Démontrer que $H + K = \{h + k \mid (h, k) \in H \times K\}$ est un sous-groupe de G .

On a $H + G \subset G$ car $H, K \subset G$.

De plus, $0 = \underbrace{0}_{\in H} + \underbrace{0}_{\in G} \in H + G$

Montrons que $x - y \in H + G$:

Par définition, $\exists (h, k), (h', k') \in H \times K$ tel que $\begin{cases} x = h + k \\ y = h' + k' \end{cases}$

On a :

$$x - y = \underbrace{(h - h')}_{\in H \text{ car } H \text{ sg}} + \underbrace{(k - k')}_{\in K \text{ car } K \text{ sg}}$$

Donc $x - y \in H + K$.

(b) Démontrer que si $H \cap K$ est trivial, alors $H + K$ est isomorphe au groupe produit $H \times K$.

On pose le groupe produit $(H \times K, *)$ tel que pour $(h, k), (h', k') \in H \times K$ on a :

$$(h, k) * (h', k') = (h + h', k + k')$$

Posons :

$$\begin{aligned} \varphi : H \times K &\rightarrow H + K \\ (h, k) &\mapsto h + k \end{aligned}$$

Soit $x \in H + K$, alors par définition :

$$\exists (h, k) \in H \times K \text{ tel que } x = h + k = \varphi(h, k)$$

Donc φ est surjective.

Soit $x, y \in H \times K$, i.e $\exists h, h' \in H, k, k' \in H$ tel que $\begin{cases} x = h + h' \\ y = k + k' \end{cases}$ On a :

$$\begin{aligned} \varphi(x * y) &= \varphi((h + h', k + k')) \\ &= (h + h') + (k + k') \\ &= (h + k) + (h' + k') \\ &= \varphi((h, k)) + \varphi((h', k')) \end{aligned}$$

Donc, c'est un morphisme.

Soit $(h, k) \in \ker(\varphi)$ on a :

$$\begin{aligned} \varphi(h, k) &= 0 \\ h + k &= 0h = -k \end{aligned}$$

Donc $h \in K \cap H = \{0\}$ par énoncé. et donc $h = k = 0$

Donc $\ker(\varphi) = \{(0, 0)\}$, donc φ est injective, et donc bijective.

8. *Énoncé* : Soit $n \geq 1$; on pose

$$H_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = n\}$$

Démontrer que H_n est un sous-groupe de (\mathfrak{S}_n, \circ) .

Utilisons le critère de sous-groupe : un sous-ensemble non vide H d'un groupe G est un sous-groupe ssi $\forall x, y \in H, xy^{-1} \in H$.

- (a) $H_n \neq \emptyset$ car l'identité $\text{id} \in \mathfrak{S}_n$ vérifie $\text{id}(n) = n$; donc $\text{id} \in H_n$.
 (b) Soient $\sigma, \tau \in H_n$. Alors $\sigma(n) = n$ et $\tau(n) = n$. Comme τ est bijective, $\tau^{-1}(n) = n$, donc $\tau^{-1} \in H_n$. Dès lors

$$(\sigma \circ \tau^{-1})(n) = \sigma(\tau^{-1}(n)) = \sigma(n) = n,$$

donc $\sigma \circ \tau^{-1} \in H_n$.

Ainsi H_n est un sous-groupe de (\mathfrak{S}_n, \circ) .

► Anneaux et corps

9. *Énoncé : Entiers de Gauss. Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un anneau commutatif. Quels sont ses inversibles ?*

Analyse :

Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$ inversible.

Donc $\exists \hat{z} \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $z \times \hat{z} = 1$

Donc $|z|^2 \times |\hat{z}|^2 = 1^2 = 1$

Donc $|z| = |\hat{z}| = 1$.

Donc $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $z = a + ib$ avec $\underbrace{a^2}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{b^2}_{\in \mathbb{N}} = 1$

$$\text{Donc } \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$z \in \{-1, 1, i, -i\}$$

Synthèse :

1 est inversible (1), -1 est inversible (-1), i est inversible ($-i$) et vice-versa.

10. *Énoncé : Nilradical. Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On définit l'ensemble des éléments nilpotents de \mathbb{A} de la façon suivante :*

$$\text{Nil}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{A} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0\}$$

- (a) *Démontrer que $\text{Nil}(\mathbb{A})$ est stable par produit et somme.*

On pose $\text{Nil}(\mathbb{A}) = \text{Nil}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{A} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0\}$

Soit $x, y \in \text{Nil}(\mathbb{A})$, montrons que $x + y \in \text{Nil}(\mathbb{A})$ et $xy \in \text{Nil}(\mathbb{A})$

Par définition, $\exists n, p \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} x^n = 0 \\ y^p = 0 \end{cases}$

\mathbb{A} est commutatif, donc $(xy)^p = x^p y^p = 0$. Donc $xy \in \text{Nil}(\mathbb{A})$

Et comme \mathbb{A} est commutatif :

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+p} &= \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k y^{n+p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+p}{k} x^k y^{n+p-k} + \sum_{k=n}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k y^{n+p-k} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $x + y \in \text{Nil}(\mathbb{A})$.

(b) $\text{Nil}(\mathbb{A})$ est-il un sous-anneau de \mathbb{A} ?

On a :

$$1 \in \text{Nil}(\mathbb{A}) \iff \exists n \geq 0, 1^n = 0 \iff 1 = 0 \iff \mathbb{A} = 0$$

Donc si $\text{Nil}(\mathbb{A}) = 0$ alors oui, sinon non.

(c) Montrer que si $x \in \text{Nil}(\mathbb{A})$ alors $1 - x \in \mathbb{A}^\times$ et déterminer son inverse.

Soit $x \in \text{Nil}(\mathbb{A})$, i.e, $\exists n \geq 0$ tel que $x^n = 0$

$$\text{Or } 1^n - x^n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$\text{Or } 1 - x^n = 0, \text{ donc } (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1$$

$$\text{Donc } 1 - x \in \mathbb{A}^\times \text{ et } (1 - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

11. *Enoncé* : Soit \mathbb{A} un anneau tel que l'application $f : x \mapsto x^2$ soit un endomorphisme surjectif de \mathbb{A} . Démontrer que \mathbb{A} est commutatif.

Soit l'endomorphisme surjectif :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{A} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Comme f est surjectif, $\forall y \in \mathbb{A}, \exists x \in \mathbb{A}$ tel que $y = x^2$

$$\text{De plus, c'est un morphisme donc } \forall x, y \in \mathbb{A} : \begin{cases} (xy)^2 = x^2 y^2 \\ (x + y)^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Soient $x, y \in \mathbb{A}$, alors :

$$(x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + y^2$$

Donc $xy + yx = 0$, c'est à dire $xy = -yx$.

$$\text{Donc } f(xy) = f(-yx)$$

$$\text{Donc } (xy)^2 = ((-y)x)^2, \text{ d'où } x^2 y^2 = y^2 x^2.$$

Soient $a, b \in \mathbb{A}$, alors $\exists x, y \in \mathbb{A}$ tels que $\begin{cases} x^2 = a \\ y^2 = b \end{cases}$ par surjectivité.

Donc $ab = ba$. Donc \mathbb{A} est commutatif.

12. *Enoncé* : L'anneau \mathbb{R}^2 (muni des opérations terme à terme) est-il intègre ?

L'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \times)$:

$$\text{Pour } (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{\neq}, \begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ (x, y) \times (x', y') = (xx', yy') \end{cases}$$

Or :

$$(1, 0) \times (0, 1) = (0, 0) \neq (0, 1)$$

Donc non.

► Corps

13. *Enoncé : Démontrer que $\mathbb{Q}[j] = \{a + bj + cj^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.*

Posons $\mathbb{Q}[j] = \{a + bj + cj^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

On a : $\mathbb{Q}[j] \in \mathbb{C}$

Egalement : $1 = 1 + 0 \times j + 0 \times j^2 \in \mathbb{Q}[j]$

Soit $z, z' \in \mathbb{Q}[j]$, alors $\exists a, a', b, b', c, c' \in \mathbb{Q}$ tel que $\begin{cases} z = a + jb + j^2c \\ z' = a' + jb' + j^2c' \end{cases}$ On a :

$$z - z' = \underbrace{(a - a')}_{\in \mathbb{Q}} + j \underbrace{(b - b')}_{\in \mathbb{Q}} + j^2 \underbrace{(c - c')}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[j]$$

Et aussi :

$$\begin{aligned} zz' &= (a + jb + j^2c)(a' + jb' + j^2c') \\ &= (aa' + bc' + cb') + j(ba' + ab' + cc') + j^2(ac' + ca' + bc) \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{Q}[j]$ est un anneau commutatif et $\mathbb{Q}[j] \neq \{0\}$

Soit $z = a + jb + j^2c \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + jb + j^2c} \\ &= \frac{a + \bar{j}b + \bar{j}^2c}{|a + jb + j^2c|^2} \quad \text{car } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ &= \frac{a + \bar{j}b + \bar{j}^2c}{(a + j^2b + jc)(a + jb + j^2c)} \end{aligned}$$

Or $\bar{j} = j^2$ et $\bar{j}^2 = \bar{j} = j$

d'où :

$$\frac{1}{z} = \frac{a + j^2b + jc}{a^2 + b^2 + c^2 - (ac + ab + bc)}$$

Posons $X = a^2 + b^2 + c^2 - (ac + ab + bc)$ et donc :

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{X} + j \frac{c}{X} + j^2 \frac{b}{X} \in \mathbb{Q}[j]$$

Donc c'est un corps.

14. *Enoncé : Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Démontrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.*

Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$

On pose $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrons que c'est un sous-anneau de \mathbb{R}

On a : $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \subset \mathbb{R}$

Egalement : $1 = 1 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$

Soit $\begin{cases} x = a + b\sqrt{d} \\ x' = a' + b'\sqrt{d} \end{cases}$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$

On a :

$$x - x' = \underbrace{(a - a')}_{\in \mathbb{Q}} + \sqrt{d} \underbrace{(b - b')}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$$

De la même manière :

$$xx' = \underbrace{aa + dbb'}_{\in \mathbb{Q}} + \sqrt{d} \underbrace{ab' + a'b}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$$

Donc $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ est un sous anneau commutatif et $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \neq 0$

Soit $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \setminus 0$, i.e $\begin{cases} x = a + \sqrt{d} \times b & a, b \in \mathbb{Q} \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\frac{1}{x}$ existe dans \mathbb{R} . Donc pour montrer que x est l'inverse dans $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, il faut montrer que $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$

On a :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{\underbrace{a^2 - db^2}_{\neq 0}} = \frac{a}{\underbrace{a^2 - db^2}_{\in \mathbb{Q}}} - \frac{b}{\underbrace{a^2 - db^2}_{\in \mathbb{Q}}} \sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$$

Donc c'est un corps.

15. *Énoncé : Soit \mathbb{K} un corps.*

(a) *Justifier que pour tout $x, y \in \mathbb{K}$ on a $(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.*

Soit $x, y \in \mathbb{K}$

Si $(x = 0) \vee (y = 0)$, alors $xy = 0$. Donc ok

Sinon par contraposée, si $(x \neq 0) \wedge (y \neq 0)$, alors si $xy = 0$, on a $xy = 0 \times y$

Donc par intégrité, comme $y \neq 0$ on a $x = 0$. Ce qui est absurde.

Donc $xy \neq 0$

(b) *Démontrer que tout endomorphisme de \mathbb{K} est injectif.*

Soit $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ un morphisme.

Soit $x \in \ker(\varphi)$, i.e $\varphi(x) = 0$

Si $x \neq 0$, alors x est inversible et $xx^{-1} = 1$

Donc :

$$\varphi(xx^{-1}) = \varphi(x) \times \varphi(x^{-1}) = \varphi(1) = 1$$

Donc $0 \times \varphi(x^{-1}) = 1$

Donc $0 = 1$

Donc $\mathbb{K} = \{0\}$, ce qui est absurde car \mathbb{K} est un corps.

Donc $\ker(\varphi) = \{0\}$, et φ est injectif.

► Approfondissement

16. *Énoncé : Soit G un groupe abélien fini ayant un nombre impair d'éléments. Calculer le produit des éléments de G .*

17. *Énoncé : On appelle anneau de Boole tout anneau \mathbb{A} tel que $\forall a \in \mathbb{A}, a^2 = a$.*

(a) *Démontrer que tout anneau de Boole est commutatif.*

(b) *Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau de Boole. Montrer que $\forall a \in \mathbb{A}, a + a = 0$.*

18. *Énoncé : Idéaux d'un anneau commutatif. Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif. On appelle idéal de \mathbb{A} tout sous-groupe $(I, +)$ de $(\mathbb{A}, +)$ tel que*

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall x \in I, ax \in I.$$

- (a) Démontrer que si I est un idéal contenant 1 alors $I = \mathbb{A}$. Quels sont les idéaux d'un corps ?
- (b) Déterminer les idéaux de \mathbb{Z} et ceux de \mathbb{D} .
- (c) Démontrer que si I et J sont deux idéaux de \mathbb{A} alors $I \cap J$ et $I + J$ le sont également.
- (d) Un idéal I de \mathbb{A} est dit premier s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{A}, \quad ab \in I \Rightarrow (a \in I \vee b \in I).$$

Démontrer que l'intersection de tous les idéaux premiers de \mathbb{A} est égale à l'ensemble $\text{Nil}(\mathbb{A})$.

19. *Énoncé* : Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.
20. *Énoncé* : Déterminer tous les morphismes de groupe de \mathbb{Q} dans \mathbb{Z} .