

## GROUPES, ANNEAUX ET CORPS

## ► Groupes

1. *Groupe de Klein*. Soient  $K = \{e, a, b, c\}$  un ensemble à quatre éléments ; démontrer que la LCI suivante définit une loi de groupe abélien sur  $K$ .

$\star$	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$e$

2. (a) Soit  $G$  un groupe tel que  $\forall g \in G, g^2 = e_G$ . Montrer que  $G$  est abélien.  
 (b) Que dire du cas où  $\forall g \in G, g^2 = g$  ?
3. Démontrer que si  $H$  et  $K$  sont deux sous-groupes d'un groupe  $G$ , alors  $H \cup K$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $H \subset K$  ou  $K \subset H$ .
4. Déterminer tous les morphismes de groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$  dans lui-même.
5. Démontrer que les groupes  $\mathbb{R}^*$  et  $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$  sont isomorphes.
6. On pose  $\Gamma = \{(z \in \mathbb{C}) \mapsto az + b \mid (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$ . Démontrer que  $(\Gamma, \circ)$  est un groupe. Est-il abélien ?
7. Soit  $(G, +)$  un groupe abélien et soient  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$ .  
 (a) Démontrer que  $H + K = \{h + k \mid (h, k) \in H \times K\}$  est un sous-groupe de  $G$ .  
 (b) Démontrer que si  $H \cap K$  est trivial, alors  $H + K$  est isomorphe au groupe produit  $H \times K$ .
8. Soit  $n \geq 1$  ; on pose

$$H_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = n\}.$$

Démontrer que  $H_n$  est un sous-groupe de  $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ .

## ► Anneaux et corps

9. *Entiers de Gauss*. Montrer que  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  est un anneau commutatif. Quels sont ses inversibles ?
10. *Nilradical*. Soit  $(\mathbb{A}, +, \times)$  un anneau commutatif. On définit l'ensemble des éléments *nilpotents* de  $\mathbb{A}$  de la façon suivante :

$$\text{Nil}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{A} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0\}.$$

- (a) Démontrer que  $\text{Nil}(\mathbb{A})$  est stable par produit et somme.  
 (b)  $\text{Nil}(\mathbb{A})$  est-il un sous-anneau de  $\mathbb{A}$  ?  
 (c) Montrer que si  $x \in \text{Nil}(\mathbb{A})$  alors  $1 - x \in \mathbb{A}^\times$  et déterminer son inverse.
11. Soit  $\mathbb{A}$  un anneau tel que l'application  $f : x \mapsto x^2$  soit un endomorphisme surjectif de  $\mathbb{A}$ . Démontrer que  $\mathbb{A}$  est commutatif.
12. L'anneau  $\mathbb{R}^2$  (muni des opérations terme à terme) est-il intègre ?

## ► Corps

13. Démontrer que  $\mathbb{Q}[j] = \{a + bj + cj^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  est un corps.
14. Soit  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ . Démontrer que  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  est un corps.
15. Soit  $\mathbb{K}$  un corps.  
 (a) Justifier que pour tout  $x, y \in \mathbb{K}$  on a  $(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$ .  
 (b) Démontrer que tout endomorphisme de  $\mathbb{K}$  est injectif.

## ► Approfondissements

16. Soit  $G$  un groupe abélien fini ayant un nombre impair d'éléments. Calculer le produit des éléments de  $G$ .
17. On appelle *anneau de Boole* tout anneau  $\mathbb{A}$  tel que  $\forall a \in \mathbb{A}, a^2 = a$ .
- (a) Démontrer que tout anneau de Boole est commutatif.
  - (b) Soit  $(\mathbb{A}, +, \times)$  un anneau de Boole. Montrer que  $\forall a \in \mathbb{A}, a + a = 0$ .
18. *Idéaux d'un anneau commutatif*. Soit  $(\mathbb{A}, +, \times)$  un anneau commutatif. On appelle *idéal* de  $\mathbb{A}$  tout sous-groupe  $(I, +)$  de  $(\mathbb{A}, +)$  tel que

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall x \in I, ax \in I.$$

- (a) Démontrer que si  $I$  est un idéal contenant 1 alors  $I = \mathbb{A}$ . Quels sont les idéaux d'un corps ?
- (b) Déterminer les idéaux de  $\mathbb{Z}$  et ceux de  $\mathbb{D}$ .
- (c) Démontrer que si  $I$  et  $J$  sont deux idéaux de  $\mathbb{A}$  alors  $I \cap J$  et  $I + J$  le sont également.
- (d) Un idéal  $I$  de  $\mathbb{A}$  est dit *premier* si il vérifie la propriété suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{A}, (ab \in I) \Rightarrow ((a \in I) \vee (b \in I)).$$

Démontrer que l'intersection de tous les idéaux premiers de  $\mathbb{A}$  est égale à l'ensemble  $\text{Nil}(\mathbb{A})$ .

19. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.
20. Déterminer tous les morphismes de groupe de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{Z}$ .