SUITES NUMÉRIQUES

▶ Autour de la convergence

1. *Enoncé : Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :*

   (a) $u_n = (-1)^n e^{-n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \geq -1^n \geq 1 \quad \text{et} \quad e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc par produits d'une fonction bornée et d'une fonction convergente vers 0 :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   (b) $x_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ avec $a > 0$ et $b > 0$
   Soit $a, b > 0$. On a :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 0, \quad x_n &= \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}\end{aligned}$$

Si $a > b$, alors $\frac{b}{a} < 1$ et $\left(\frac{b}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Si $a < b$, alors $\frac{b}{a} > 1$ et $\left(\frac{b}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Si $a = b$, alors $\frac{b}{a} = 1$ et :

$$x_n = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

Donc dans tous les cas, on a :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } a > b \\ 0 & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

   (c) $v_n = \frac{n^2+7}{n^3+n^4}$

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1, \quad v_n &= \frac{n^2 + 7}{n^3 + n^4} \\ &= \frac{n^2\left(1 + \frac{7}{n^2}\right)}{n^4\left(\frac{1}{n} + 1\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{7}{n^2}}{n^2\left(\frac{1}{n} + 1\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

(d) $y_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 0, \quad y_n &= \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} \\
&= n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) \\
&= n \times \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \\
&= n \times \frac{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \\
&= n \times \frac{2 \cdot \frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1
\end{aligned}$$

(e) $w_n = \lfloor e^n \rfloor$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e^n - 1 < \lfloor e^n \rfloor < e^n$$

Donc :

$$e^n - 1 < w_n < e^n$$

Donc par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$$

(f) $z_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

On a :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1, \quad z_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Donc :

$$z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

2. *Enoncé : Étudier la convergence de la suite de terme général* $u_n = \frac{2n^2-\sin(n)}{\cos(n)-3n^2}$.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 0, \quad u_n &= \frac{2n^2 - \sin(n)}{\cos(n) - 3n^2} \\
&= \frac{2 - \frac{\sin(n)}{n^2}}{\frac{\cos(n)}{n^2} - 3} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

3. *Enoncé : Montrer que les suites définies par*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

pour $n \geq 1$ sont adjacentes.
On a :

$$\forall n \geq 0, \quad S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

et :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1, \quad T_{n+1} - T_n &= S_{n+1} + \frac{1}{n+1} - S_n - \frac{1}{n} \\
&= (S_{n+1} - S_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \left(\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1, \quad T_n - S_n &= \left(S_n + \frac{1}{n}\right) - S_n \\
&= \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Donc, les suites S_n et T_n sont adjacentes.

4. *Enoncé : Étudier la convergence de la suite de terme général*

$$u_n = \left(\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right)^{1/n^3}$$

Soit $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$,
Alors :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 0, \ln(u_n) &= \frac{1}{n^3} \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right) \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\binom{n}{k}\right) \\
&\leq \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(2^n\right) \\
&= \frac{1}{n^3} \ln(2) \times \sum_{k=0}^{n} n \\
&= \frac{(n+1)n}{n^3} \ln(2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$u_n = e^{\ln(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$$

5. *Enoncé : Que dire de la convergence de la somme d'une suite divergente et d'une suite convergente ?*

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente.
   Alors :

   $$\exists l \in \mathbb{R} \text{ tel que } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

   Supposons que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ pour un certain $L \in \mathbb{R}$.
   Donc :

   $$\forall n > 0, v_n = (u_n + v_n) - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L - l$$

   Donc v_n converge vers $L - l$, ce qui est absurde.
   Donc $v_n + u_n$ diverge.

6. *Enoncé : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $[0,1]$ telles que $u_nv_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1 .*

   Soit $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites de $[0,1]$ telles que $u_nv_n \to 1$
   $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ étant à valeur dans $[0,1]$, elles sont bornées
   On a : $\begin{cases} 0 \leq v_n \leq 1 \\ 0 \leq u_n \leq 1 \end{cases}$
   D'une part : $0 \leq u_nv_n \leq v_n$
   Et donc : $0 \leq u_nv_n \leq v_n \leq 1$
   D'autre part : $0 \leq u_nv_n \leq u_n$
   Et donc : $0 \leq u_nv_n \leq u_n \leq 1$
   Comme $u_nv_n \to 1$, on a par encadrement que $u_n \to 1$ et $v_n \to 1$

7. *Enoncé : Suites d'entiers.*

   (a) *Établir que toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.*

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'entiers naturels. On a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_0$$

   Comme la suite est bornée par 0 et u_0, par le théorème de la limite monotone, la suite converge vers une limite $l \in \mathbb{N}$.
   Donc :

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{4}$$

   Donc par inégalité triangulaire, on a :

   $$\begin{aligned} \forall n \geq N, \quad |u_n - u_N| &\leq |u_n - l| + |u_N - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

   Posons $\varepsilon = 1$, alors :

   $$\forall n \geq N, \quad |u_n - u_N| \leq \frac{1}{2}$$

Or u_n et u_N sont des entiers naturels, donc :

$$\forall n \geq N, u_n = u_N$$

Donc la suite est stationnaire.

(b) *Démontrer que toute suite convergente d'entiers relatifs est stationnaire.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $l \in \mathbb{Z}$.
Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Donc par inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \geq N, \quad |u_n - u_N| &\leq |u_n - l| + |u_N - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Posons $\varepsilon = 1$, alors :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - u_N| \leq \frac{1}{2}$$

Or u_n et u_N sont des entiers relatifs, donc :

$$\forall n \geq N, u_n = u_N$$

Donc la suite est stationnaire.

8. *Enoncé : Moyenne arithmético-géométrique. Soit u, v deux suites réelles définies de la façon suivante : à $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ fixés tels que $0 < v_0 < u_0$ on pose :*

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

Démontrer que u et v convergent vers une même limite.
On a :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 0, \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2 &\geq 0 \\ u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n} &\geq 0 \\ \frac{u_n + v_n}{2} &\geq \sqrt{u_n v_n}\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} \geq v_{n+1}$$

Et comme $u_0 > v_0$, on a :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n \geq v_n$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned}2u_n &\geq u_n + v_n \\ u_n &\geq \frac{u_n + v_n}{2} \\ u_n &\geq u_{n+1}\end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} u_n v_n &\geq v_n^2 \\ v_n &\leq \sqrt{u_n v_n} \\ v_n &\leq v_{n+1} \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Donc les deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite.

▶ Suites extraites

9. *Enoncé : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle croissante telle que $(u_{2n})_n$ soit convergente. Montrer que $(u_n)_n$ converge.*
   $(u_{2n})_n$ est convergente, donc il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :

   $$u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

   u_n est croissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$u_{2n+2} \geq u_{2n+1} \geq u_{2n}$$

   Donc la suite $(u_n)_n$ converge vers l.
10. *Enoncé : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les suites $(u_{2n})_n, (u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que $(u_n)_n$ converge.*
    Hypothèse :

    $$\begin{cases} u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l' \\ u_{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'' \end{cases}$$

    Posons :

    $$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

    La suite extraite par φ de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est :

    $$\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$$

    Donc :

    $$(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

    Mais comme $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{3(2n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
    Par unicité de la limite, on a :

    $$l = l''$$

    Pour $n \geq 0$,

    $$u_{6n+3} = u_{3(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l''$$

Or :

$$u_{6n+3} = u_{2(3n+1)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$$

Donc par unicité de la limite, on a :

$$l' = l''$$

Donc :

$$l = l' = l''$$

11. *Enoncé : Montrer que la suite $(\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)_n$ est divergente.*
Soit $n \in \mathbb{N}$, on remarque que :

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in [0, 1[$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = 0$$

Egalement,
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\exists m \in \mathbb{N}, n^2 - 1 = m^2$ Alors :

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= m^2 \\ n^2 - m^2 &= 1 \\ (n-m)(n+m) &= 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} n - m = 1 \quad &\text{et} \quad n + m = 1 \\ n = 1 \quad &\text{et} \quad m = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2-1} \neq \lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor$
Donc : $u_{n^2-1} = \sqrt{n^2-1} - \lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor > 0$
On a :

$$\begin{aligned} (n-1)^2 < n^2 - 1 &< n^2 \\ \sqrt{(n-1)^2} < \sqrt{n^2-1} &< \sqrt{n^2} \\ n - 1 < \sqrt{n^2-1} &< n \end{aligned}$$

Donc :

$$\lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor = n - 1$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \quad u_{n^2-1} &= \sqrt{n^2-1} - \lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor \\ &= \sqrt{n^2-1} - (n-1) \\ &= \sqrt{n^2-1} - \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right] \\ &= \sqrt{n^2-1} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}} \times \frac{2}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}} \times \frac{2}{\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}} + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

▶ Étude de suites récurrentes

12. *Enoncé : Déterminer le terme général des suites récurrentes suivantes et calculer leur limite éventuelle.*
    (a) $u_0 = 3, u_1 = 11$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n$;
    On pose l'équation caractéristique :
    $$X^2 - 6X + 5 = 0$$
    On remarque que 1 est racine, donc la deuxième racine est $\frac{5}{1\times 1} = 5$. Donc, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que :
    $$u_n = a + b5^n$$
    On a :
    $$\begin{cases} u_0 = a + b = 3 \\ u_1 = a + 5b = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$
    Donc :
    $$u_n = 1 + 2 \cdot 5^n$$
    Donc la suite converge vers $+\infty$.
    (b) $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
    On pose l'équation caractéristique :
    $$X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 = 0$$
    Donc, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tel que :
    $$u_n = (a + nb)$$
    $$\begin{cases} u_0 = a = 1 \\ u_1 = a + b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$
    Donc :
    $$u_n = 1 + n$$
13. *Enoncé : Déterminer le terme général et la limite éventuelle de chacune des suites récurrentes suivantes* ($n \in \mathbb{N}$) *:*
    (a) $u_0 = -1, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$;
    On pose l'équation caractéristique :
    $$X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} = 0$$
    On remarque que $X = 1$ est racine, donc la deuxième racine est $\frac{\frac{1}{2}}{1\times 1} = \frac{1}{2}$.
    Donc, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que :
    $$u_n = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
    On a :
    $$\begin{cases} u_0 = a + b = -1 \\ u_1 = a + \frac{b}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -4 \\ a = 3 \end{cases}$$

Donc :

$$u_n = 3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc la suite converge vers 3.

(b) $v_0 = 1, v_1 = 9$ et $v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n$;
On pose l'équation caractéristique :

$$X^2 - X + \frac{1}{4} = (X - \frac{1}{2})^2 = 0$$

Donc, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$v_n = (a + nb)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On a :

$$\begin{cases} v_0 = a = 1 \\ v_1 = \frac{a+b}{2} = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 17 \end{cases}$$

Donc :

$$v_n = (1 + 17n))\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc la suite converge vers 0.

(c) $w_0 = 0, w_1 = 1$ et $w_{n+2} = w_{n+1} - \frac{i}{4}w_n$;
On pose l'équation caractéristique :

$$X^2 - X + \frac{i}{4} = 0$$

Calculons le discrimiant de ce polynôme en X :

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - i \\ &= e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Posons $\delta = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Donc les racines de l'équation sont :

$$X_{1,2} = \frac{1 \pm \delta}{2} = \frac{1 \pm \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}$$

Donc, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$w_n = a \times \left(\frac{1 - \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}\right)^n + b \times \left(\frac{1 + \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}\right)^n$$

On a :

$$\begin{cases} w_0 = a + b = 0 \\ w_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}\,(b - a) \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{\sqrt[4]{8}e^{-i\frac{\pi}{8}}} \\ b = \frac{1}{\sqrt[4]{8}e^{-i\frac{\pi}{8}}} \end{cases}$$

Donc :

$$w_n = -\frac{1}{\sqrt[4]{8}e^{-i\frac{\pi}{8}}} \times \left(\frac{1 - \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt[4]{8}e^{-i\frac{\pi}{8}}} \times \left(\frac{1 + \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}\right)^n$$

En simplifiant :

$$w_n = \frac{1}{\sqrt[4]{8}e^{-i\frac{\pi}{8}}}\left(\left(\frac{1+\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}\right)^n\right)$$

<u>Autre méthode :</u>
Soit $z \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$ tel que $z = x + iy$ et $z^2 = 1 - i$. On a :

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 1 - i$$

Donc :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy = -\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = |z^2| = \sqrt{2} \end{cases}$$

Donc x et y sont de signes opposées et :

$$x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Donc :

$$x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

Posons $\delta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Donc, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$w_n = a \times \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{8}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{8}}\right)^n + b \times \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{8}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{8}}\right)^n$$

Comme $w_0 = a + b = 0$, on peut simplifier la suite en posant $b = -a$.

$$w_n = a\Big(\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{8}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{8}}\right)^n - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{8}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{8}}\right)^n\Big)$$

On a :

$$w_1 = 1 = a\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{8}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{8}} - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{8}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{8}}\right)\right)$$

Donc :

$$a\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) = 1$$

Donc :

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}}$$

Donc :

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}}\left(\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{8}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{8}}\right)^n - \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{8}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{8}}\right)^n\right)$$

(d) $x_0 = 1, x_1 = 1$ et $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 8x_n$;
On pose l'équation caractéristique :

$$X^2 - 6X + 8 = 0$$

On remarque que $X = 2$ est racine, donc la deuxième racine est $\frac{8}{1\times 2} = 4$.
Donc, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$x_n = a \times 2^n + b \times 4^n$$

On a :

$$\begin{cases} x_0 = a + b = 1 \\ x_1 = 2a + 4b = 2(a + 2b) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$x_n = \frac{3}{2} \times 2^n - \frac{1}{2} \times 4^n$$

Donc la suite converge vers 3.

14. *Enoncé : Étudier la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.*
Montrons d'abord que la suite (u_n) est positive par récurrence :
— Initialisation : $u_0 = 2 > 0$.
— Hérédité : Supposons $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0$ car $u_n > 0$ et $\frac{1}{u_n} > 0$.

Donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
Montrons que la suite est strictement croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$$

car $u_n > 0$. Donc (u_n) est strictement croissante.
Montrons que la suite diverge vers $+\infty$:
Supposons par l'absurde que (u_n) est majorée, donc converge vers une limite $l > 2$. Alors, en passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \implies l = l + \frac{1}{l}$$

Donc $\frac{1}{l} = 0$, donc $l = +\infty$. Contradiction si l est fini.
Ainsi, la suite (u_n) est positive, strictement croissante et diverge vers $+\infty$.

15. *Enoncé : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = 2u_n$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(u_n) - \ln(2)$.*
Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = 2u_n$
Soit $(v_n)_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n) - \ln(2)$
On a $u_{n+1}^2 = 2u_n$, donc $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

(a) *Enoncé : Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.*

$$\begin{aligned}\forall n \geq 0, \quad v_{n+1} &= \ln(u_{n+1}) - \ln(2)\\ &= \ln(\sqrt{2u_n}) - \ln(2)\\ &= \frac{1}{2}\ln(2u_n) - \ln(2)\\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(2)\\ &= \frac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln(2)) = \frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

Egalement,

$$v_0 = \ln(1) - \ln(2)$$

Donc :

$$\forall n \geq 0, v_n = -\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \ln(2)$$

(b) *Enoncé : Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc :

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$$

et :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

▶ Considérations topologiques

16. *Enoncé : Démontrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
D'après la caractérisation séquentielle de la densité :

$$\mathbb{D} \text{ est une partie dense de } \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_n \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}, x_n \to x$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$,

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

Et comme on a :

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

On a bien :

$$x_n \geq x < x_n + 10^{-n}$$

Et donc :

$$|x - x_n| < 10^{-n} \text{ et } x_n \to x$$

Donc $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$

17. *Enoncé : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ différent de $+\infty$ et $f\ :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Déterminer la borne inférieure de l'ensemble $\{|f(x)| \mid x \in]a, +\infty[\}$.*
La partie concernée est non vide et minorée par 0. De plus, par composition de limites on a $f\left(a + \frac{1}{n}\right) \to 0$.
Donc la borne inférieure recherché est bien 0 par caractérisation séquentielle.

18. *Enoncé : Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $I\backslash\{a\}$ telle que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ (on dit que a est adhérent à $I\backslash\{a\}$).*

    Comme I est un intervalle, il existe un N entier tel que pour tout $\geq N$, il existe un élément $a_n \in I$ tel que $|a - a_n| \geq \frac{1}{n}$ d'ou le résultat.

▶ Approfondissement

19. *Enoncé : Nombres harmoniques. Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*

    (a) *Vérifier que la suite $(H_n)_n$ est croissante et établir qu'elle diverge vers $+\infty$.*

    Si $n \geq 1$ alors $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$ donc la suite est strictement croissante. De plus, on vérifie par méthode des rectangles que, pour tout $k \geq 2$,

    $$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$$

    et donc, par somme, pour $n \geq 1$

    $$H_n \geq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n)$$

    d'où le résultat par minoration.

    (b) *Démontrer que $\dfrac{H_n}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.*

    En sommant l'inégalité avec intégrales ci-dessus, on obtient, pour $n \geq 1$:

    $$\ln(n) \leq H_n \leq 1 + \ln(n+1)$$

    et donc on obtient le résultat par quotient et théorème d'existence par encadrement.

20. *Enoncé : Moyenne de Césaro. Soit $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que*

    $$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

    On fixe $\varepsilon > 0$; par définition de limite il existe un rang $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$.

    De fait, pour tout $n \geq N$ on a :

    $$\begin{aligned}
    \left|\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k - \ell\right| &= \frac{1}{n+1} \left|\sum_{k=0}^{n} (a_k - \ell)\right| \\
    &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |a_k - \ell| \\
    &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k - \ell| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - \ell|\right) \\
    &\leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k - \ell| + \sum_{k=N+1}^{n} \varepsilon\right).
    \end{aligned}$$

En posant $M = \sum_{k=0}^{N} |a_k - \ell|$ on a donc :

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - \ell\right| \leq \frac{M}{n+1} + \varepsilon$$

d'où le résultat.

21. *Enoncé : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0, u_1 \in]0,1[$ fixés et par la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

   (a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.*
   On raisonne par récurrence double. Tout d'abord, $u_0, u_1 \in]\,0,1[$. On suppose alors que $u_n, u_{n+1} \in]\,0,1[$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sqrt{u_n}, \sqrt{u_{n+1}} \in \left]\,0,1\,\right[$ puis $u_{n+2} \in]\,0,1\,[$. On conclut que $u_n \in]\,0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) *On pose $v_n = \min(u_n, u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(v_n)_n$ est croissante.*
   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   — Si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $v_n = u_n$. De plus, $u_{n+2} \geq \sqrt{u_n} \geq u_n$ puisque $u_n \in]\,0,1\,[$. On a donc $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2}) \geq u_n = v_n$.

   — Si $u_n \geq u_{n+1}$, alors $v_n = u_{n+1}$. De plus, $u_{n+2} \geq \sqrt{u_{n+1}} \geq u_{n+1}$ puisque $u_{n+1} \in]\,0,1\,[$. On a donc $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2}) = u_{n+1} = v_n$.

   Dans les deux cas, $v_{n+1} \geq v_n$. Ainsi $(v_n)_n$ est croissante.

   (c) *Montrer que $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la convergence et la limite de $(u_n)_n$.*

   — Si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $v_n = u_n$. De plus, $u_{n+2} \geq \sqrt{u_n} \geq u_n$ puisque $u_n \in]\,0,1\,[$. Donc $\sqrt{u_{n+2}} \geq \sqrt{u_n}$. On a également $u_{n+3} \geq \sqrt{u_n}$ puisque $\sqrt{u_{n+1}} \geq \sqrt{u_n}$ et $\sqrt{u_{n+2}} \geq \sqrt{u_n}$. On a montré que $u_{n+2} \geq \sqrt{u_n}$ et $u_{n+3} \geq \sqrt{u_n}$ donc $v_{n+2} \geq \sqrt{u_n} = \sqrt{v_n}$.

   — Si $u_n \geq u_{n+1}$, alors $v_n = u_{n+1}$. De plus, $u_{n+2} \geq \sqrt{u_{n+1}} = \sqrt{v_n} \geq v_n$ puisque $v_n = u_{n+1} \in]\,0,1\,[$. On a également $u_{n+3} \geq \sqrt{v_n}$ puisque $u_{n+2} \geq v_n$ et $u_{n+1} = v_n$. On a alors $u_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$ et $u_{n+3} \geq \sqrt{v_n}$ donc $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$.

   Dans les deux cas, $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$.
   On a $v_n \in]\,0,1\,[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $(v_n)_n$ est bornée et croissante ; elle converge. Notons l sa limite. On a bien entendu $l \in [0,1]$. De plus, $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$ donc par passage à la limite (la fonction racine carrée est continue), $l \geq \sqrt{l}$ et donc $l \geq 1$. Ainsi $l = 1$.
   De plus $v_n \leq u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $(u_n)_n$ converge vers 1 .

22. *Enoncé : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de nombres réels et p, q deux entiers naturels impairs tels que $(u_n + v_n)_n$ et $(u_n^p - v_n^q)_n$ convergent vers 0. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers 0.*
   Supposons $(u_n)_n$ non majorée. Alors on peut en extraire une soussuite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ divergeant vers $+\infty$. Puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\left(v_{\varphi(n)}\right)_n$ diverge vers $-\infty$. Mais alors $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}^p = +\infty$ et, q étant impair, $\lim_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)}^q = -\infty$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}^p - v_{\varphi(n)}^q = +\infty$, ce qui contredit l'énoncé.

Supposons $(u_n)_n$ non minorée. Alors on peut en extraire une soussuite $(u_\varphi(n))_n$ divergeant vers $-\infty$. Puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \left(v_{\varphi(n)}\right)_n$ diverge vers $+\infty$. Mais alors, p étant impair, $\lim_{n\to+\infty} u^p_{\varphi(n)} = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v^q_{\varphi(n)} = +\infty$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u^p_{\varphi(n)} - v^q_{\varphi(n)} = -\infty$, ce qui contredit l'énoncé.
La suite $(u_n)_n$ est donc bornée. D'après le théorème de BolzanoWeierstrass, elle admet une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ convergeant vers un réel l. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0, \left(v_{\varphi(n)}\right)_n$ converge vers $-l$. Enfin, puisque $\lim_{n\to+\infty} u^p_n - v^q_n = 0, l^p - (-l)^q = 0$. pet q étant impairs, ceci équivaut à $l^p + l^q \overset{n\to+\infty}{=} = 0$. La fonction $x \mapsto x^p + x^q$ étant strictement croissante (encore une fois, on utilise le fait que p et q sont impairs) et s'annulant en 0 , on a donc $l = 0$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$: on démontre alors classiquement que (u_n) converge vers 0 . Puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$, on en déduit que (v_n) converge vers 0 .