

TD 7

Approfondissements

19. (a) Si $n \geq 1$ alors $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$ donc la suite est strictement croissante. De plus, on vérifie par méthode des rectangles que, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$$

et donc, par somme, pour $n \geq 1$

$$H_n \geq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n)$$

d'où le résultat par minoration.

- (b) En sommant l'inégalité avec intégrales ci-dessus, on obtient, pour $n \geq 1$:

$$\ln(n) \leq H_n \leq 1 + \ln(n+1)$$

et donc on obtient le résultat par quotient et théorème d'existence par encadrement.

20. On fixe $\varepsilon > 0$; par définition de limite il existe un rang $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$.

De fait, pour tout $n \geq N$ on a :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k - \ell \right| &= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n (a_k - \ell) \right| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |a_k - \ell| \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^N |a_k - \ell| + \sum_{k=N+1}^n |a_k - \ell| \right) \\
&\leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^N |a_k - \ell| + \sum_{k=N+1}^n \varepsilon \right).
\end{aligned}$$

En posant $M = \sum_{k=0}^N |a_k - \ell|$ on a donc :

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k - \ell \right| \leq \frac{M}{n+1} + \varepsilon$$

d'où le résultat.

21. (a) On raisonne par récurrence double. Tout d'abord, $u_0, u_1 \in]0, 1[$. On suppose alors que $u_n, u_{n+1} \in]0, 1[$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sqrt{u_n}, \sqrt{u_{n+1}} \in]0, 1[$ puis $u_{n+2} \in]0, 1[$. On conclut que $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $v_n = u_n$. De plus, $u_{n+2} \geq \sqrt{u_n} \geq u_n$ puisque $u_n \in]0, 1[$. On a donc $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2}) \geq u_n = v_n$.

— Si $u_n \geq u_{n+1}$, alors $v_n = u_{n+1}$. De plus, $u_{n+2} \geq \sqrt{u_{n+1}} \geq u_{n+1}$ puisque $u_{n+1} \in]0, 1[$. On a donc $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, u_{n+2}) = u_{n+1} = v_n$.

Dans les deux cas, $v_{n+1} \geq v_n$. Ainsi $(v_n)_n$ est croissante.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $v_n = u_n$. De plus, $u_{n+2} \geq \sqrt{u_n} \geq u_n$ puisque $u_n \in]0, 1[$. Donc $\sqrt{u_{n+2}} \geq \sqrt{u_n}$. On a également $u_{n+3} \geq \sqrt{u_n}$ puisque $\sqrt{u_{n+1}} \geq \sqrt{u_n}$ et $\sqrt{u_{n+2}} \geq \sqrt{u_n}$. On a montré que $u_{n+2} \geq \sqrt{u_n}$ et $u_{n+3} \geq \sqrt{u_n}$ donc $v_{n+2} \geq \sqrt{u_n} = \sqrt{v_n}$.

— Si $u_n \geq u_{n+1}$, alors $v_n = u_{n+1}$. De plus, $u_{n+2} \geq \sqrt{u_{n+1}} = \sqrt{v_n} \geq v_n$ puisque $v_n = u_{n+1} \in]0, 1[$. On a également $u_{n+3} \geq \sqrt{v_n}$ puisque $u_{n+2} \geq v_n$ et $u_{n+1} = v_n$. On a alors $u_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$ et $u_{n+3} \geq \sqrt{v_n}$ donc $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$.

Dans les deux cas, $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$.

On a $v_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $(v_n)_n$ est bornée et croissante; elle converge. Notons l sa limite. On a bien entendu $l \in [0, 1]$. De plus, $v_{n+2} \geq \sqrt{v_n}$ donc par passage à la limite (la fonction racine carrée est continue), $l \geq \sqrt{l}$ et donc $l \geq 1$. Ainsi $l = 1$.

De plus $v_n \leq u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $(u_n)_n$ converge vers 1.

22. Supposons $(u_n)_n$ non majorée. Alors on peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ divergeant vers $+\infty$. Puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, $(v_{\varphi(n)})_n$ diverge vers $-\infty$. Mais

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}^p = +\infty$ et, q étant impair, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varphi(n)}^q = -\infty$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}^p - v_{\varphi(n)}^q = +\infty$, ce qui contredit l'énoncé.

Supposons $(u_n)_n$ non minorée. Alors on peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ divergeant vers $-\infty$. Puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, $(v_{\varphi(n)})_n$ diverge vers $+\infty$. Mais

alors, p étant impair, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}^p = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{\varphi(n)}^q = +\infty$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}^p - v_{\varphi(n)}^q = -\infty$, ce qui contredit l'énoncé.

La suite $(u_n)_n$ est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers un réel l . Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = 0$, $(v_{\varphi(n)})_n$ converge vers $-l$. Enfin, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^p - v_n^q = 0$, $l^p - (-l)^q = 0$. Et q étant impair, ceci équivaut à $l^p + l^q \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. La fonction $x \mapsto x^p + x^q$ étant strictement croissante (encore une fois, on utilise le fait que p et q sont impairs) et s'annulant en 0, on a donc $l = 0$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$: on démontre alors classiquement que (u_n) converge vers 0. Puisque $v_n = (u_n + v_n) - u_n$, on en déduit que (v_n) converge vers 0.